BAB II

KAJIAN PUSTAKA

A. Program Linear

Secara umum masalah dapat ditafsirkan sebagai suatu kesenjangan antara yang seharusnya terjadi dan yang sesungguhnya terjadi atau antara cita-cita (tujuan) dan keadaan sekarang. Menyelesaikan masalah berarti menjembatani kesenjangan di atas (Susanta: 1994:9). Masalah dalam kehidupan sehari-hari akan mudah diperoleh penyelesaiannya jika terlebih dahulu kita mengurai permasalahan yang ada sehingga bisa mengetahui dengan pasti model apa yang akan dilakukan.

Model adalah abstraksi dan penyederhanaan masalah dari keadaan nyata. Model yang baik akan digunakan sebagai alat dalam menyusun pola dasar masalah yang dihadapi, kemudian akan timbul strategi yang tepat dalam pelaksanaan atau tindakan yang diperlukan. Suatu model yang baik adalah yang memenuhi tiga kriteria berikut yaitu: model harus mampu merangkum unsur-unsur yang sangat pokok dari persoalan yang dihadapi, model harus dibuat sederhana mungkin sesuai dengan kemampuan yang ada dan sesuai dengan pentingnya permasalahan yang dihadapi dan yang terakhir adalah model tersebut harus mampu tidak memperdulikan hal-hal yang kurang berguna.

Di bidang ilmu matematika, suatu masalah dapat dimodelkan secara matematis dengan langkah- langkah umum sebagai berikut:

1. Mengidentifikasikan masalahnya
2. Memodelkan masalah secara matematis
3. Mencari metode-metode solusi
4. Memilih metode yang paling cocok
5. Melaksanakan (implementasi)
6. Mengevaluasi hasil.

Ada berbagai macam teknik perencanaan untuk mencari solusi dengan menggunakan model matematika, salah satunya adalah program linear. Program linear merupakan suatu teknik perencanaan yang menggunakan model matematika dengan tujuan menemukan beberapa kombinasi alternatif pemecahan masalah, kemudian dipilih mana yang terbaik diantaranya dalam rangka menyusun strategi dan langkah-langkah. Kebijakan lebih lanjut tentang alokasi sumber daya dan dana yang terbatas guna mencapai tujuan atau sasaran yang diinginkan secara optimal.

Program linear adalah teknik matematika untuk memilih program (serangkaian kegiatan) terbaik dari kumpulan alternatif yang mungkin dengan menggunakan fungsi linear. Masalah-masalah yang dapat diselesaikan dengan program linear disebut masalah program linear. Umumnya, masalah program linear didefinisikan sebagai masalah optimasin (memaksimumkan atau meminimumkan) fungsi linear dari variabel-variabel bebas, terhadap serangkaian kendala linear yang menyangkut variabel-variabel bebas tersebut (Wu & Coppins: 1981: 35).

Fungsi linear yang hendak dicari nilai optimumnya (maksimumkan atau minimumkan) disebut fungsi tujuan. Variabel-variabel babas yang ada pada fungsi tujuan dan kendala linear disebut variabel keputusan karena nilai variabel inilah yang harus ditentukan (diputuskan) untuk dapat mengoptimalkan fungsi tujuan yang dibatasi oleh kendala linear. Kendala linear dapat berupa persamaan linear atau pertidaksamaan linear. Selanjutnya kendala linear disebut kendala. Adapun langkah-langkah umum dalam menyelesaikan masalah program linear adalah dengan tiga macam cara, yaitu dengan memodelkan masalah umum, menyelesaikan masalah program linear dan menerjemahkan solusi dari solusi program linear.

1. Langkah Dasar Dalam Perumusan Model Program Linear

Ada tiga langkah dasar dalam perumusan model program linear yaitu:

a) Menentukan variabel keputusan

Variabel keputusan adalah variabel persoalan yang akan mempengaruhi nilai tujuan yang hendak dicapai. Biasanya variabel keputusan dimisalkan sebagai $x_j, j = 1,2,3, \dots, n$ dengan x_j menyatakan variabel keputusan ke$-j$ dan n menyatakan banyaknya variabel keputusan.

b) Merumuskan fungsi tujuan

Fungsi tujuan dalam model program linear adalah fungsi yang hendak dioptimumkan (dimaksimumkan atau diminimumkan). Bentuk umum fungsi tujuan dapat dituliskan sebagai $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ dengan c_j adalah koefisien ongkos.

c) Merumuskan kendala

Kendala dapat diartikan sebagai suatu pembatas terhadap kumpulan putusan yang mungkin dibuat dan dapat berbentuk persamaan atau pertidaksamaan.

2. Asumsi-Asumsi Dasar

Suatu masalah dapat diselesaikan dengan program linear apabila memenuhi asumsi-asumsi seperti yang dikemukakan oleh Siringoringo (2005:35) sebagai berikut.

a) Linearitas

Asumsi ini menyatakan bahwa perbandingan antara *input* yang satu dengan *input* lainnya, atau untuk suatu *input* dengan *output* besarnya tetap dan terlepas (tidak tergantung) pada tingkat produksi.

b) Kesebandingan

Asumsi ini menyatakan bahwa jika variabel pengambilan keputusan x_j berubah maka dampak perubahannya akan menyebar dalam proporsi yang sama terhadap fungsi tujuan dan juga kendalanya.

c) Keterjumlahan

Asumsi ini menyatakan bahwa nilai parameter suatu kriteria optimisasi (koefisien variabel pengambilan keputusan dalam fungsi tujuan) merupakan jumlah dari nilai masing-masing c_j dalam model program linear tersebut.

d) Dapat terbagi

Asumsi ini menyatakan bahwa variabel-variabel pengambilan keputusan x_j, jika diperlukan dapat dibagi ke dalam pecahan- pecahan yaitu nilai-nilai x_j tidak hanya *integer* (bilangan bulat) tapi boleh selain bilangan bulat.

3. Bentuk Umum Masalah Optimalisasi

Masalah program linear tidak lain adalah masalah optimasi bersyarat, yakni pencarian nilai maksimum atau pencarian nilai minimum suatu fungsi tujuan berkenaan dengan keterbatasan-keterbatasan atau kendala yang harus dipenuhi. Masalah-masalah tersebut secara umum dapat dirumuskan sebagai berikut.

Masalah program linear untuk kasus maksimisasi dapat dituliskan sebagai berikut (Dumairy 2012:346-347).

Memaksimumkan

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n \qquad \textbf{(2.1.a)}$$

dengan kendala-kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n \leq b_3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \qquad \textbf{(2.1.b)}$$

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 0, \text{(syarat non-negatif)} \qquad \textbf{(2.1.c)}$$

dengan $\boldsymbol{m}$ menyatakan banyaknya batasan sumber atau fasilitas yang tersedia dan $\boldsymbol{n}$ menyatakan banyaknya kegiatan yang menggunakan sumber atau fasilitas yang tersedia atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1.a}$$

Dengan kendala:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \tag{2.1.b}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3, \dots., n \tag{2.1.c}$$

Dimana a_{ij} merupakan koefisien teknis, sedangkan masalah meminimalisasi dapat dituliskan sebagai berikut.

Meminimumkan $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$ **(2.2.a)**

dengan kendala-kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n \leq b_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \tag{2.2.b}$$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0, \text{(syarat non-negatif)} \tag{2.2.c}$$

dengan $\boldsymbol{m}$ menyatakan banyaknya batasan sumber atau fasilitas yang tersedia dan $\boldsymbol{n}$ menyatakan banyaknya kegiatan yang menggunakan sumber atau fasilitas yang tersedia atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.2.a}$$

Dengan kendala:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \tag{2.2.b}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3, \dots, n \tag{2.2.c}$$

Masalah maksimisasi dijumpai misalnya dalam kasus penentuan kombinasi jumlah produk guna memperoleh profit maksimum, sedangkan masalah minimalisasi ditemui misalnya dalam kasus upaya menekan biaya produksi. Variabel x_j yang mencerminkan aktivitas, dalam program linear disebut juga variabel keputusan. Variabel keputusan tidak boleh negatif artinya bahwa jumlah barang yang akan diproduksi harus lebih besar atau sama dengan nol, karenanya di dalam setiap rumusan model program linear selalu diberikan kendala $\geq 0, j = 1,2,3, \dots, n$. Hal ini dikenal dengan sebutan pembatasan ketidaknegatifan.

Kendala-kendala dalam sebuah masalah program linear tidak selalu harus berbentuk pertidaksamaan yang seragam. Dalam kasus tertentu dapat terjadi salah satu kendala atau lebih berbentuk persamaan. Dapat pula terjadi di dalam sebuah masalah terdapat kendala pertidaksamaan berbentuk ≥ maupun ≤.

Contoh 2.1

Sebuah perusahaan Bakery memproduksi dua jenis roti yaitu roti donat dan roti bolu. Kedua jenis barang tersebut diproduksi dengan mempergunakan 3 jenis bahan baku (tepung terigu, gula pasir dan mentega). Roti donat diproses melalui bahan baku tepung terigu dengan takaran 4 kg, bahan baku gula pasir dengan takaran 3 kg dan bahan baku mentega dengan takaran 1kg, sedangkan roti bolu diproses dengan bahan baku gula pasir dan bahan baku mentega masing-masing dengan takaran 2 kg. Dalam 1 hari bahan baku tepung terigu bisa habis dalam 16 kg, bahan baku gula pasir dalam 24 kg dan bahan baku mentega dalam 20 kg. Roti donat dapat dijual di pasar dengan harga Rp 400.000 per buah sedangkan roti bolu dijual seharga Rp 300.000 per buah.

Perusahaan akan menghitung pendapatan tiap hari berbasiskan kemampuan per hari dari bahan baku yang dimiliki. Oleh karena itu, dengan tujuan memaksimumkan pendapatan perusahaan setiap harinya, perusahaan harus menentukan suatu kombinasi dari jumlah roti donat dan jumlah roti bolu yang akan diproduksi dan dijual guna memperoleh pendapatan yang maksimum.

Pembahasan contoh 2.1

a) Menentukan Variabel Keputusan

Kasus di atas bisa kita buat ikhtisarnya dalam bentuk tabel informasi persoalan untuk perusahaan Bakery seperti diperlihatkan oleh Tabel 2.1 Tabel tersebut memperlihatkan takaran yang diperlukan tiap roti dari masing-masing bahan baku yang digunakan, serta memperlihatkan keterbatasan bahan baku tiap harinya. Tabel ini juga memperlihatkan kendala dari proses produksi untuk pembuatan roti donat dan roti bolu.

Tabel 2.1 Informasi Persoalan Pembuatan Roti Donat dan Roti Bolu Bagi Perusahaan Bakery

Bahan baku	**Takaran yang diperlukan untuk**		**Total Kg yang**
	Donat	Bolu	
Tepung terigu	4	-	1
Gula pasir	3	2	2
Mentega	1	2	2

Variabel keputusan masalah program linear ini adalah:

x = Banyaknya roti donat yang akan diproduksi.

y = Banyaknya roti bolu yang akan diproduksi.

b) Fungsi Tujuan

Fungsi tujuan dari persoalan di atas adalah memaksimalkan pendapatan karena roti donat memiliki pendapatan per unit sebesar $Rp\ 400.000,-$, sedangkan roti bolu memiliki pendapatan per unit sebesar $Rp\ 300.000,-$, sehingga total pendapatan adalah $Z = 400.000\,x + 300.000\,y$.

c) Fungsi Kendala

Berbasiskan Tabel 2.1 maka fungsi kendala dapat dituliskan sebagai berikut.

Kendala 1: $4x \leq 16$

Kendala 2: $3x + 2y \leq 24$

Kendala 3: $x + 2y \leq 20$

Dengan kendala non negativitasnya adalah $x, y \geq 0$ sehingga secara lengkap, masalah tersebut dapat dituliskan sebagai program linear memaksimumkan $Z = 400.000\,x + 300.000\,y$

dengan kendala:

$$4x \ \leq 16{,}3\ x + 2y \leq 24, x + 2y \leq 20,$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \text{ (kendala non negativitas)}$$

B. Metode Solusi Program Linear

Solusi masalah program linear dapat dikerjakan antara lain dengan dua macam cara, yaitu dengan metode grafik dan dengan metode simpleks.

1.1 Metode Grafik

Metode grafik adalah salah satu teknik dalam program linear yang menitik beratkan pada sistem kordinat sumbu (x, y). Contoh 2.2 menemukan solusi dari contoh 2.1

Secara umum langkah-langkah solusi dengan metode grafik, setelah model permasalahannya dirumuskan, adalah sebagai berikut (Supranto : 1979 : 29).

a. Setiap pertidaksamaan harus digambarkan grafiknya sehingga keseluruhan bisa diperoleh daerah mana yang memberikan nilai terbesar atau maksimum.

b. Fungsi tujuan juga harus digambarkan grafiknya dengan cara menentukan sebarang nilai Z, kemudian buat garis yang menunjukan garis fungsi Z = 400.000 x + 300.000 y. Kemudian dapat ditarik garis yang sejajar atau paralel dengan garis ini. Garis itu ditarik kearah yang memberikan nilai makin besar atau makin kecil sampai titik yang memberikan nilai makin besar atau makin kecil sampai dicapai titik yang memberikan nilai fungsi tujuan Z

maksimum atau minimum (tergantung pada persoalan yang akan dipecahkan).

Langkah-langkah penyelesaian contoh soal menggunakan metode grafik.

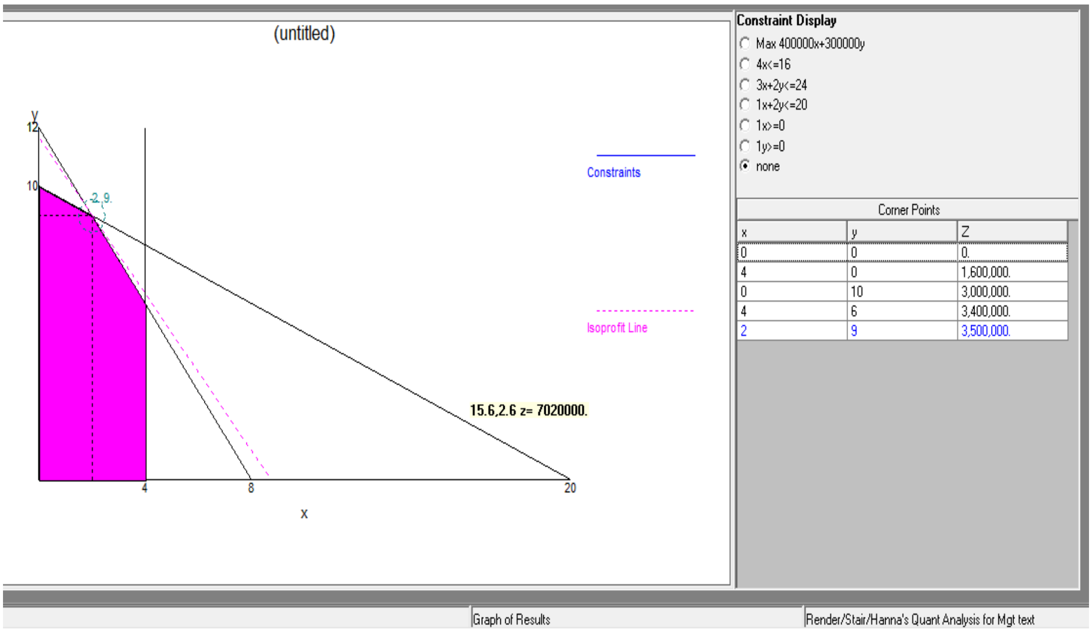
1) Pertidaksamaan yang pertama, untuk menggambarkan grafiknya dalam menentukan daerah yang masih memenuhi pertidaksamaan tersebut, gunakan $x = 4$ yang merupakan suatu persamaan garus lurus. Semua daerah dibawah garis tersebut dan termasuk garisnya sendiri memenuhi pertidaksamaan pertama. (lihat gambar 2.2)
2) Pertidaksamaan yang kedua, untuk menggambarkan grafiknya dalam menentukan daerah yang masih memenuhi pertidaksamaan tersebut, gunakan $x = -\frac{2}{3}y + 8$ yang merupakan suatu persamaan garus lurus. Semua daerah dibawah garis tersebut dan termasuk garisnya sendiri memenuhi pertidaksamaan kedua. (lihat gambar 2.2)
3) Pertidaksamaan yang ketiga, untuk menggambarkan grafiknya dalam menentukan daerah yang masih memenuhi pertidaksamaan tersebut, gunakan $x = -2y + 20$ yang merupakan suatu persamaan garus lurus. Semua daerah dibawah garis tersebut dan termasuk garisnya sendiri memenuhi pertidaksamaan ketiga. (lihat gambar 2.2)
4) Gabungkan pertidaksamaan yang pertama, kedua dan ketiga untuk memperoleh daerah layak yang memenuhi ketiga pertidaksamaan yaitu daerah yang diarsir. (lihat gambar 2.2)
5) Gambarkan grafik fungsi tujuan $Z = 400.000\,x + 300.000\,y$, kita

ambil nilai $Z = 100.000$ maka diperoleh suatu persamaan $Z = 400.000x + 300.000\,y$ yang juga merupakan garis lurus, garis tersebut dinamakan Z_1. Kemudian tarik garis-garis yang sejajar dengan Z_1 sampai kita peroleh Z maksimum. Garis-garis itu harus bergerak menuju ke arah kanan sebab nilai tujuannya akan makin besar sampai akhirnya memotong titik G. Pada titik G nilai Z menjadi maksimum dengan nilai $x = 2$ dan $y = 9$ sebab nilai $Z = 400.000\,(2) + 300.000\,(9)$ adalah 3.500.000. Garis tersebut dinamakan Z_2. (lihat gambar 2.2)

6) Nilai $Z = 3.500.000$ merupakan Z maksimum. Garis lurus yang sejajar dengan Z_2 dan terletak disebelah kanan Z_2 akan mempunyai nilai fungsi yang lebih besar akan tetapi nilai x sudah terletak di luar daerah layak *(feasible)* sehingga tidak memenuhi pertidaksamaan-pertidaksamaan yang menggambarkan kendala-kendala yang ada. Garis Z_3 yang ditarik sejajar Z_1 dan terletak di sebelah kiri Z_1 akan memberikan fungsi tujuan yang lebih kecil dari 100.000. Daerah feasible adalah himpunan yang memuat semua penyelesaian feasible. Penyelesaian feasible adalah penyelesaian pasangan (x, y) yang memenuhi pada semua kendala.

Tabel 2.2 Koordinat Kendala Di Sumbu x Dan Sumbu y Penyelesaian Metode Grafik

No.	Persamaan	Sumbu x	Sumbu y
1.	$4x = 16$	D (4, 0)	-
2.	$3x + 2y = 24$	E (8, 0)	A (0, 12)
3.	$x + 2y = 20$	F (20, 0)	B(0, 10)
4.	$x = 0$	C (0, 0)	-
5.	$y = 0$	-	C (0, 0)



Gambar 2.1 Grafik Langkah-langkah Penyelesaian Contoh 2.1

Kasus-Kasus Khusus Metode Grafik

Pada metode grafik terdapat banyak kasus-kasus khusus seperti yang dikemukakan oleh Thomas J (2008: 39) sebagai berikut:

1. **Proses Kemunduran (degenerasi)**

   Proses kemunduran yang juga sering terdapat dalam persoalan program linear yang dikenal sebagai kemunduran dari proses penguraian persoalan yang dihadapi dengan kata lain kondisi kemunduran ini menyatakan bahwa model tersebut mempunyai paling sedikit satu kendala yang berlebih.

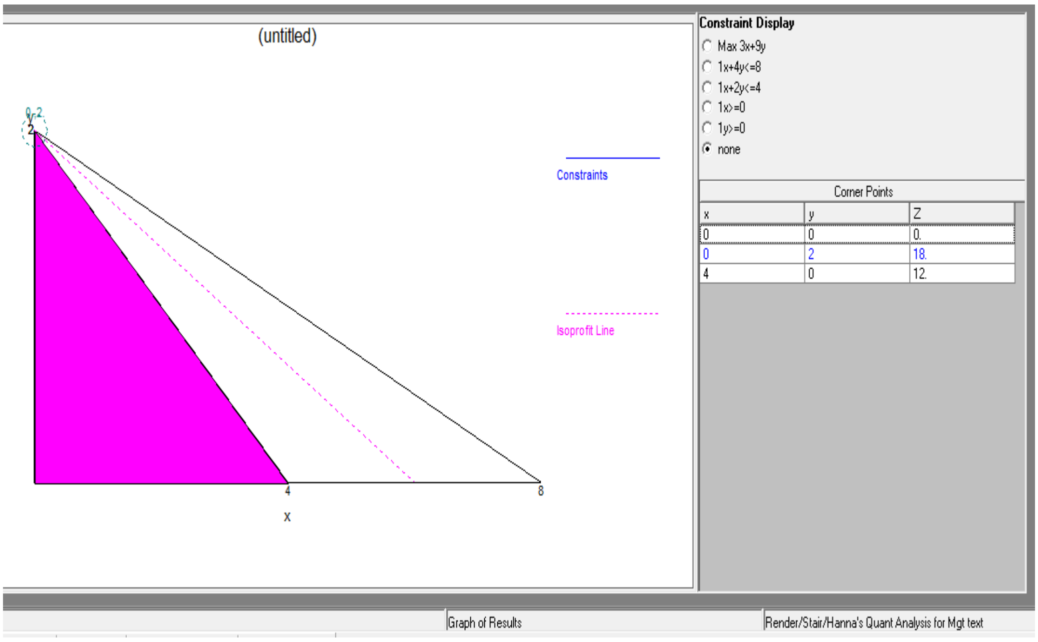
Contoh 2.3 Degenerasi

a. Solusi Optimal

Suatu persoalan optimal program linear dengan memaksimumkan fungsi tujuan $z = 3x + 9y$ dan fungsi kendala $x + 4y < 8$ dan $x + 2y < 4$ dengan $x > 0$, $y > 0$.

Tabel 2.3 Koordinat Kendala Di Sumba x dan sumbu y pada Solusi Optimal

No.	Persamaan	Sumbu x	Sumbu y
1.	$x + 4y = 8$	(8, 0)	(0,2)
2.	$x + 2y = 4$	(4, 0)	(0, 2)
4.	$x = 0$	(0, 0)	-
5.	$y = 0$	-	(0, 0)



Gambar 2.2 grafik solusi optimal proses kemunduran

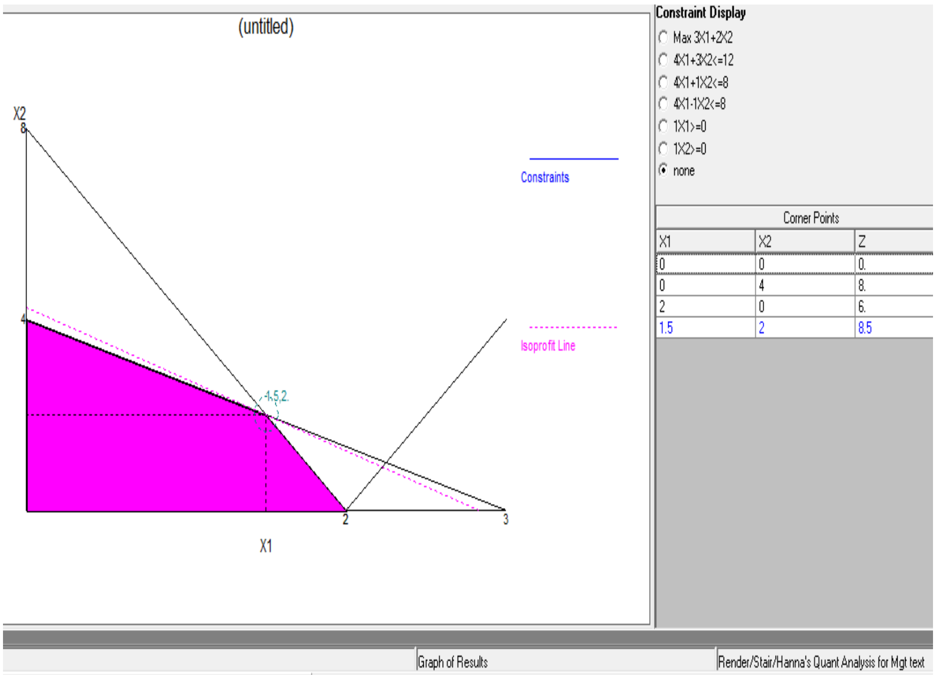
Tiitk B merupakan kelebihan dari fungsi kendala yang berpotongan dengan sumbu x. Ini merupakan suatu proses dari program linear metode grafik

b. Solusi Temporer

Suatu persoalan program linear dengan memaksimumkan fungsi tujuan $z = 3x + 2y$ dan fungsi kendala $4x + 3y < 12, 4x + y < 8$ dan $4x - y < 8$ dimana $x, y > 0$.

Tabel 2.4 Koordinat Kendala Di Sumbu x Dan Sumbu y Pada Solusi Temporer

No.	Persamaan	Sumbu x	Sumbu y
1.	$4x + 3y = 12$	(3, 0)	(0,4)
2.	$4x + y = 8$	(2, 0)	(0, 8)
3.	$4x - y = 8$	(2, 0)	(0, -8)
4.	$x = 0$	(0, 0)	-
5.	$y = 0$	-	(0, 0)



Gambar 2.3 grafik solusi optimal

Pada titik C terjadi kelebihan fungsi kendala pada saat di sumbu x. Titik C merupakan titik yang tidak mempunyai solusi optimal, sedangkan titik B dapat dinyatakan sebagai solusi optimal dan tidak memiliki proses kemunduran.

2. Alternative Optimal

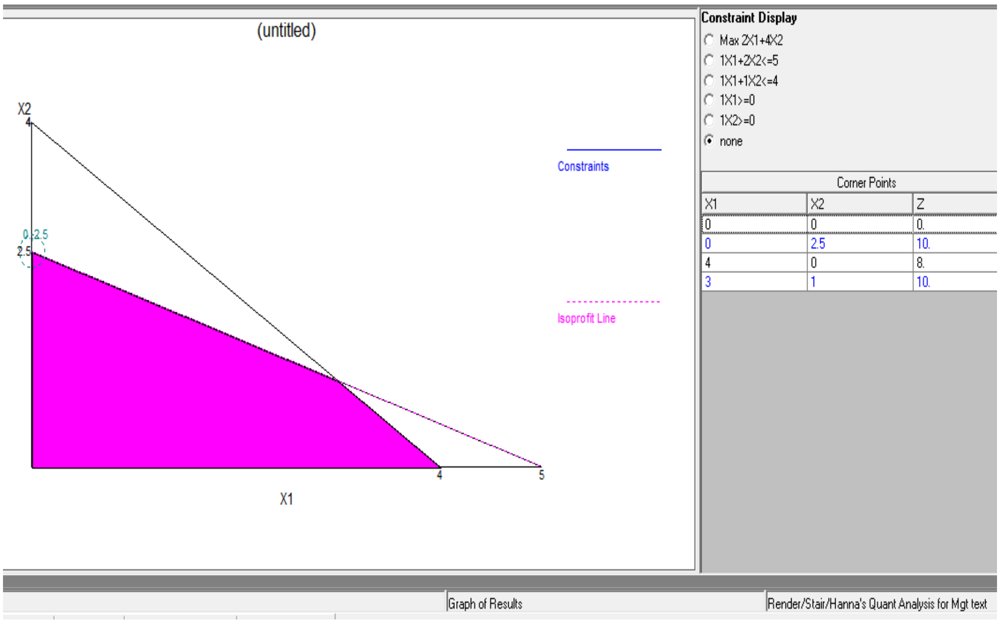
Fungsi tujuan akan dapat dinyatakan sebagai nilai optimal yang sama pada lebih dari satu solusi yang merupakan alasan untuk mengatakan alternatif yang optimal. Pengertian ini menunjukkan bahwa fungsi tujuan dapat berkembang secara tidak terbatas, karena kesejajaran pada keterikatan titik-titik pada fungsi kendala yang terbentuk dalam grafik.

Contoh 2.4

Suatu persoalan program linear dengan memaksimumkan fungsi tujuan $z = 2x + 4y$ dan fungsi kendala $x + 2y \leq 5$ dan $x + y \leq 4$ dengan $x, y \geq 0$.

Tabel 2.5 koordinat kendala di sumbu x dan sumbu y pada alternative optimal

No.	Persamaan	Sumbu x	Sumbu y
1.	$x + 2y = 5$	(5, 0)	(0, 2,5)
2.	$x + y = 4$	(4, 0)	(0, 4)
4.	$x = 0$	(0, 0)	-
5.	$y = 0$	-	(0, 0)



Gambar 2.4 Grafik Alternatif Optimal

Grafik ini menunjukkan bahwa alternatif optimal dapat muncul pada program linear apabila fungsi tujuan adalah sejajar dengan suatu kendala pada setiap titik garis segmen C, D yang ditunjukkan sebagai alternative optimal dengan selalu memiliki nilai yang sama dengan fungsi tujuannya $z = 10$.

3. Solusi Tidak Terbatas

Beberapa model program linear terdapat nilai-nilai variabel yang dapat naik dengan sendirinya tanpa menyentuh suatu kendala, yang berarti terdapat daerah solusi yang tidak dibatasi yang sedikitnya hanya pada satu arah. Hasilnya, nilai objektif dapat meningkatkan untuk persoalan minimum. Dengan demikian hal ini dapat dikatakan bahwa kedua solusi ini adalah optimal dengan nilai objektif fungsi tidak terbatas dan ketidakterbatasan itu dapat menunjukkan hanya satu keadaan saja.

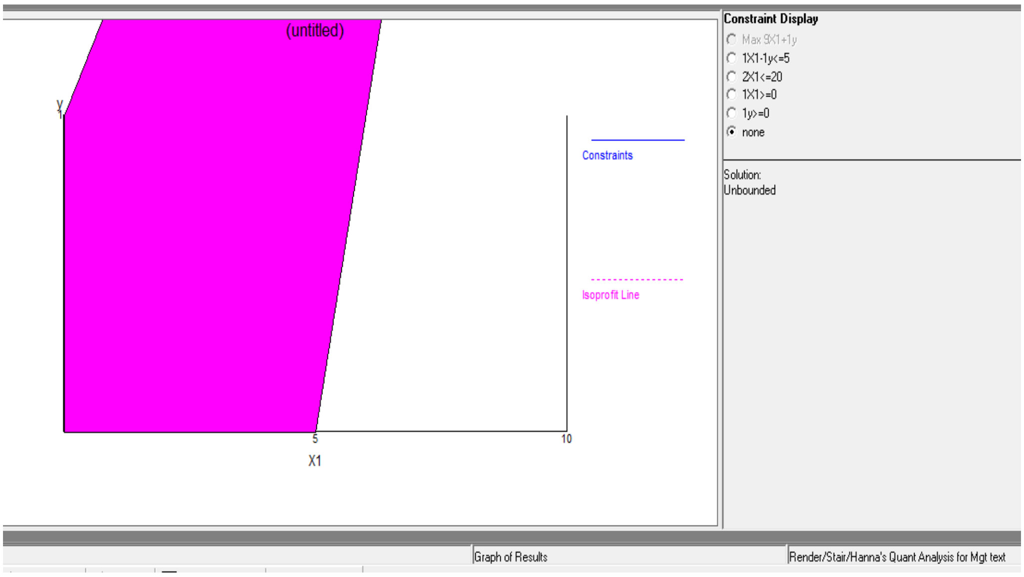
Contoh 2.5

a. Solusi Tidak Terbatas

Suatu persoalan program linear dengan memaksimumkan fungsi tujuan $z = 9x + y$ dan fungsi kendala $x - y \leq 5$ dan $2x \leq 20$ dengan $x, y \geq 0$.

Tabel 2.6 Koordinat Kendala Di Sumbu x Dan Sumbu y Pada Solusi Tidak Terbatas.

No.	Persamaan	Sumbu x	Sumbu y
1.	$x - y = 5$	(5, 0)	(0, -5)
2.	$2x = 20$	(10, 0)	(0, 0)
4.	$x = 0$	(0, 0)	-
5.	$y = 0$	-	(0, 0)



Gambar 2.5 grafik solusi tidak terbatas

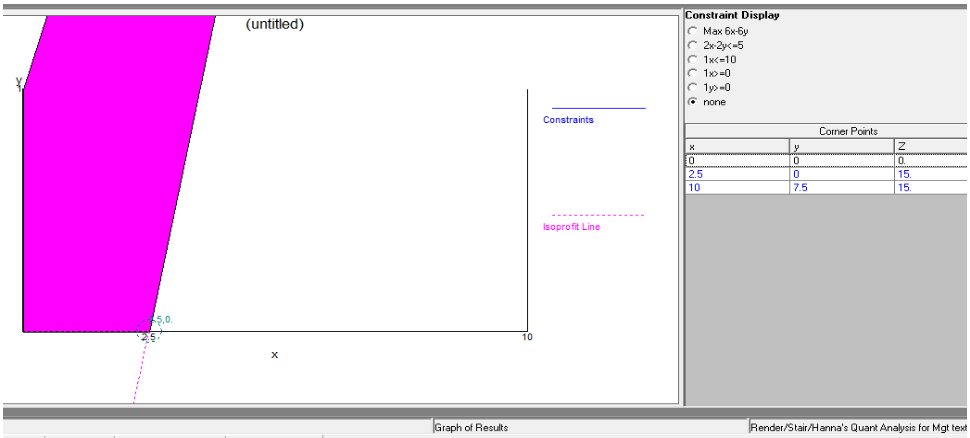
Dari grafik kita dapat mengenal suatu ketidakterbatasan sebagai suatu aturan umum, sebagai berikut. Apabila dalam grafik terdapat daerah layak namun tidak terbatas pada satu arah. Hal ini menunjukkan adanya solusi tidak terbatas dan apabila penambahan pada koefisien fungsi tujuan dari variabel negatif dalam kasus maksimum atau positif dalam kasus minimum maka nilai fungsi tujuan juga tidak terbatas.

b. Nilai Optimal dan Solusi Tidak Terbatas

Suatu persoalan program linear dengan memaksimumkan fungsi tujuan $z = 6x - 6y$ dan fungsi kendala $2x - 2y \leq 5$ dan $x \leq 10$ dengan $x, y \geq 0$.

Table 2.7 kordinat kendala di sumbu x dan sumbu y pada nilai optimal dan solusi tidak terbatas.

No.	Persamaan	Sumbu x	Sumbu y
1.	$2x - 2y = 10$	(5,0)	(0,-5)
2.	$x = 10$	(10,0)	(0,0)
4.	$x = 0$	(0,0)	-
5.	$y = 0$	-	(0,0)



Gambar 2.6 grafik nilai optimal dan solusi tidak terbatas

Dengan ini masih terdapat solusi optimal fungsi tujuan, walaupun terdapat ruang solusi tidak terbatas.

4. Solusi Tidak Layak

Apabila kendala-kendala tidak dapat memberikan kelayakan secara simultan maka dapat dikatakan bahwa model itu tidak mempunyai solusi kelayakan.

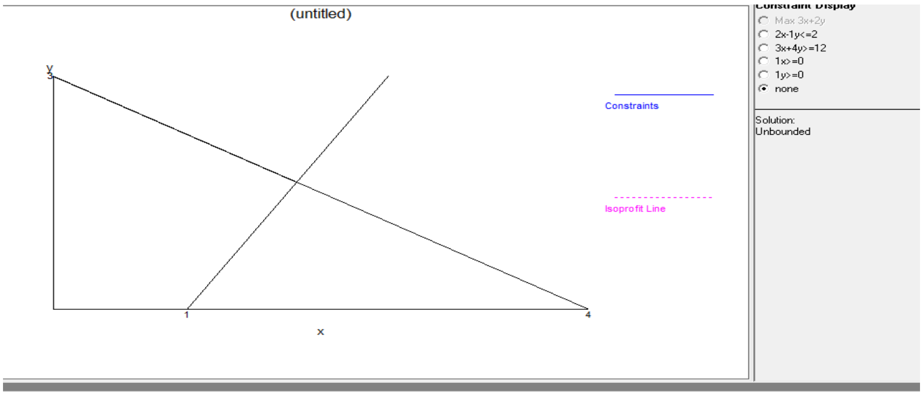
Terdapat juga kemungkinan bahwa kendala-kendala tidak mempunyai kepentingan yang layak secara simultan dan dalam hal ini diperlukan struktur model yang berbeda dan lengkap yang tidak terkait dengan kendala-kendala yang simultan untuk dapat mencapai solusi yang optimal.

Contoh 2.6

Suatu persoalan program linear dengan memaksimumkan fungsi tujuan $z = 3x + 2y$ dan fungsi kendala $2x - y \leq 2$ dan $3x + 4y \geq 12$ dengan $x, y \ \geq 0$.

Table 2.8 kordinat kendala di sumbu x dan sumbu y pada nilai optimal dan solusi tidak terbatas.

No.	Persamaan	Sumbu x	Sumbu y
1.	$2x - y = 2$	(1, 0)	(0, 2)
2.	$3x + 4y = 12$	(4, 0)	(0, 3)
4.	$x = 0$	(0, 0)	-
5.	$y = 0$	-	(0, 0)



Gambar 2.7 grafik solusi tidak layak

Grafik ini tidak mempunyai daerah layak dan juga tidak memiliki titik ekstrim yang dapat dibahas. Dengan demikian tidak terdapat solusi optimal dalam ruang kelayakan. Jadi diperlukan struktur model yang lain untuk mencapai optimal.

2.1 Metode Simpleks

Persoalan program linear tidak selalu sederhana karena melibatkan banyak pembatas dan banyak variabel sehingga tidak mungkin doselesaikan dengan metode grafik melainkan menggunakan metode simpleks. Metode simpleks adalah suatu metode yang secara pemecahan basis yang layak ke pemecahan basis yang layak lainnya dan ini dilakukan berulang-ulang (dengan jumlah ulangan yang terbatas) sehingga akhirnya tercapai sesuatu pemecahan basis yang optimum dan pada setiap tahap menghasilkan suatu nilai dari fungsi tujuan yang selalu lebih besar atau sama dengan tahap-tahap sebelumnya. Metode ini sangat berguna dalam menguraikan persoalan program linear dengan variabel yang banyak maupun fungsi kendala yang banyak.

Penentuan solusi optimal menggunakan metode simpleks didasarkan pada teknik eleminisi Gauss Jordan. Penentuan solusi optimal dilakukan dengan memeriksa titik ekstrim satu per satu dengan perhitungan iterative, sehingga penentuan solusi optimal dengan simpleks dilakukan tahap demi tahap yang disebut dengan iterasi. Iterasi ke-I hanya tergantung dari iterasi sebelumnya (i-1).

Pada metode simpleks diperkenalkan istilah *standar form* atau bentuk stap simpleks, yang digunakan untuk menyusun tabel-tabel simpleksnya. Sebagai gambaran dapat dilihat pada metode grafik yaitu terdapat satu atau beberapa titik potong yang merupakan suatu kumpulan solusi yang layak.

Yang harus diperhatikan adalah bahwa solusi basis yang layak merupakan suatu solusi dan kumpulan dari persamaan linear kebanyakan persamaan program linear dengan fungsi kendalanya berbentuk ketidaksamaan. Munculnya kendala ketidaksamaan dapat diubah ke dalam kendala persamaan. Dengan demikian suatu program linear semua kendalnya dinyatakan dalam bentuk kendala persamaan dapat disebut juga sebagai bentuk siap simpleks.

Ada beberapa istilah yang digunakan dalam metode simpleks, diantaranya:

a. **Iterasi** adalah tahapan perhitungan dimana nilai dalam perhitungan itu tergantung dari nilai tabel sebelumnya.
b. **Variabel non basis** adalah variabel yang nilainya diatur menjadi nol pada sembarang iterasi. Dalam terminologi umum, jumlah variabel non basis selalu sama dengan derajat bebas dalam sistem persamaan.
c. **Variabel basis** merupakan variabel yang nilainya bukan nol pada sembarang iterasi. Pada solusi awal, variabel basis merupakan variabel pengetat (jika fungsi kendala merupakan pertidaksamaan $\leq$) atau variabel artifisial (jika fungsi kendala menggunakan pertidaksamaan $\geq$ atau =). Secara umum,

jumlah variabel basis selalu sama dengan jumlah fungsi pembatas (tanpa fungsi non negatif).

d. **Solusi atau nilai kanan** merupakan nilai sumber daya pembatas yang masih tersedia. Pada solusi awal nilai kanan atau solusi sama dengan jumlah sumber daya pembatas awal yang ada, karena aktivitas belum dilaksanakan.

e. **Variabel pengetat** merepresentasikan sumber daya yang mengganggur pada suatu fungsi kendala, variabel ini digunakan untuk ditambahkan dalam fungsi pertidaksamaan $\leq$, supaya dengan menambahkan variabel pengetat ini diperoleh solusi fesibel awal (*initial feasible solution*, sama dengan titik origin pada grafik).

f. **Variabel semu** mempresentasikan kekurangan sumber daya pada suatu fungsi kendala, variabel digunakan untuk dikurangkan dalam fungsi pertidaksamaan $\geq$, supaya dengan menambahkan variabel *semu* ini diperoleh solusi fisibel awal (*initial feasible solution*, sama dengan titik origin pada grafik).

g. **Variabel artifisial** adalah variabel yang ditambahkan ke model matematik kendala dengan bentuk $\geq$ atau = untuk difungsikan sebagai variabel basis awal. Penambahan variabel ini terjadi pada tahap inisialisasi. Variabel ini harus bernilai 0 pada solusi optimal, karena kenyataannya variabel ini tidak ada.

h. **Kolom pivot (kolom kerja)** adalah kolom yang memuat variabel masuk. Koefisien pada kolom ini akan menjadi pembagi nilai kanan untuk menentukan baris pivot (baris kerja).

i. **Baris pivot (baris kerja)** adalah salah satu baris dari antara variabel basis yang memuat variabel keluar.

j. **Elemen pivot (elemen kerja)** adalah elemen yang terletak pada perpotongan kolom dan baris pivot. Elemen pivot akan menjadi basis perhitungan untuk tabel simpleks berikutnya.

Sebelum melakukan perhitungan iteratif untuk menentukan solusi optimal, pertama sekali bentuk umum program linear diubah ke dalam bentuk siap simpleks terlebih dahulu. Bentuk siap simpleks dalam metode simpleks tidak hanya mengubah persamaan kendala ke dalam bentuk sama dengan, tetapi setiap fungsi kendala harus diwakili oleh satu variabel basis awal. Variabel basis awal menunjukkan status sumber daya pada kondisi sebelum ada aktivitas yang dilakukan. Dengan kata lain variabel keputusan semuanya masih bernilai nol. Dengan demikian, meskipun fungsi kendala pada bentuk umum program linear sudah dalam bentuk persamaan, fungsi kendala tersebut masih harus tetap berubah.

Ada beberapa hal yang harus diperhatikan dalam membuat bentuk diap simpleks, yaitu:

a. Fungsi kendala dengan pertidaksamaan kurang dari atau sama dengan $(\leq)$.

Untuk pengkonversian ini dapat digunakan contoh kendala sebagai berikut. Seandainya pernyataan kendalanya adalah $6x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 50$ mengubah ketidaksamaan ini harus ditambah dengan variabel pengetat sehingga kendala tersebut menjadi $6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + s_1 = 50$, dimana $s_1 > 0$. Variabel pengetat (s_1) merepresentasikan sumber daya yang mengarah pada suatu fungsi kendala.

Variabel s_1 tidak berpengaruh pada fungsi tujuan. Koefisian dari s_1 pada fungsi tujuan sama dengan nol. Dengan kata lain, biaya untuk 50 unit dari sumber yang kurang atau terbatas ini akan hilang. Setiap unit yang tersisa pun tidak akan berpengaruh terhadap fungsi tujuan dengan apapun yang ada. Namun bila hal ini tidak terjadi maka kendala dan fungsi tujuannya harus dapat diformalitaskan khusus untuk biaya dari 50 unit serta nilai dari setiap unit tidak terpakai.

b. Fungsi kendala dengan pertidaksamaan lebih dari atau sama dengan (≥).

Untuk perubahan ini dapat digunakan contoh kendala sebagai berikut. Seandainya pernyataan kendalanya adalah $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 15$ mengubah ketidaksamaan ini harus ditambah dengan variabel semu sehingga kendala tersebut menjadi $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - E = 15$. Kita dapat menanggapi bahwa E sebagai jumlah yang melebihi 15 unit dan dalam hak ini kendalanya dapat dikatakan mempengaruhi target atau tujuan dari fungsi minimum pada fungsi tujuannya.

Mengenai hal ini variabel semu tidak mempunyai informasi tambahan. Dapat juga dinyatakan bahwa koefisiennya adalah nol sehingga tidak berpengaruh pada fungsi tujuan. Setiap penambahan variabel semu pada fungsi kendala dengan ketidaksamaan lebih besar atau sama dengan (≥) tidak dapat langsung diselesaikan pada tabel simpleks tetapi harus ditambah lagi dengan variabel artifisial untuk mendapatkan solusi optimal, sehingga kendala tersebut menjadi $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - E + A = 15$.

Dengan demikian pada setiap persoalan program linear dengan fungsi-fungsi kendala lebih besar atau sama dengan $(\geq)$ akan selalu digunakan variabel semu dan juga variabel artifisial untuk mendapatkan solusi yang optimal dari perhitungan di dalam tabel simpleks.

c. Fungsi kendala dengan persamaan $(=)$

Untuk menguraikan perubahan fungsi kendala persamaan atau sama dengan dapat juga digunakan contoh fungsi kendala $3x_1{+}5x_2{+}4x_3 = 25$. Untuk mengkonversi fungsi kendala ini harus ditambahkan variabel artifisial yang dinyatakan dengan $3x_1{+}5x_2{+}4x_3 + A = 25$. Dengan begitu kita dapat menganggap bahwa A merupakan jumlah yang mengurangi atau sama dengan 25 unitdari fungsi kendala. Variabel artifisial ini secara fisik tidak mempunyai arti dan hanya digunkan untuk kepentingan saja.

Metode simpleks ini lebih efisien dan dilengkapi dengan kolom ratio yang dapat memberitahukan bilamana perhitungan harus dihentikan dan juga bilamana dilanjutkan hingga diperoleh solusi yang optimal. Selanjutnya untuk proses pembentukkan basis tersebut dipergunakan tabel-tabel yang pertama akan memberikan pemecahan basis daerah layak yang pertama sampai pada pemecahan terakhir yang memberikan solusi yang optimal.

Pengurajan kasus program linear dapat juga dinyatakan dengan sistem persamaan kendala yang dibentuk melalui penambahan variabel seperti pengetat yang berguna bagi solusi basis. Hal ini dapat juga ditunjukkan sebagai berikut.

Secara umum rumusan model yang standar untuk metode simpleks dengan tabel berkolom variabel basis sebagai berikut,

Memaksimumkan $z - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 - \cdots - c_nx_n = 0$

dengan kendala:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}x_1 & \pm & s_1 & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}x_1 & \pm & s_2 & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \ldots & + & a_{3n}x_1 & \pm & s_3 & = & b_3 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \ldots & + & a_{mn}x_1 & \pm & s_m & = & b_m
\end{array}
$$

Bentuk tabelnya dapat disajikan sebagai berikut (Dumairy: 2005:362)

VB	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	s_1	s_2	$\cdots$	s_n	S	
z	c_1	c_2	$\cdots$	c_n	0	0	$\cdots$	0	0	**Persamaan –z**
s_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1	**Persamaan -s_1**
s_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	b_2	**Persamaan -s_2**
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
s_n	a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	b_n	**Persamaan -s_n**

Tabel 2.9 Tabel Metode Simpleks

Berikut keterangan tabel metode simpleks di atas:

1. Kolom Variabel Bebas (VB)

   Kolom ini berisi variabel-variabel basis atau disebut juga dengan variabel-variabel tidak nol, yaitu variabel-variabel yang nilainya ditunjukan oleh konstanta-konstanta yang bersesuaian di kolom s. Pada solusi awal atau tabel pertama kolom VB ini berisi semua variabel semu. Pada tahap-tahap berikutnya veriabel-variabel yang termuat di kolom ini akan berganti-ganti kecuali z yang ada dari solusi awal hingga solusi akhir. Variabel-variabel lain yang tidak tercantum di kolom ini dinamakan variabel-variabel basis atau variabel nol.

2. Kolom-kolom variabel

   Kolom ini berisi koefisien dari masing-masing variabel dalam persamaan yang bersesuaian yaitu a_{ij} untuk variabel-variabel asli x_j dan 0 atau 1 untuk variabel-variabel semu s_j untuk tabel pertama.

3. Kolom s

   Kolom s (solusi) ini berisi nilai-nilai ruas kanan dari persamaan-persamaan implisit yang terdapat di dalam model baik persamaan fungsi tujuan maupun persamaan-persamaan fungsi kendala. Angka-angka yang tercantum di kolom s ini mencerminkan nilai z dan nilai-nilai variabel basis pada tahap solusi yang bersangkutan. Langkah-langkah pengerjaan program linear dengan metode simpleks dengan tabel terkolom variabel basis adalah sebagai berikut:

1) Membentuk masalah program linear menjadi bentuk konkrit yaitu kendalanya harus berbentuk persamaan, dengan menambahkan variabel pengetat, variabel semu dan $b_1 \geq 0$ sehingga memenuhi bentuk siap simpleks program linear.
2) Bentuk tabel pertama dengan menetapkan semua variabel semu sebagai variabel bebas.
3) Tentukan satu variabel masuk (*entering variable*) di antara variabel-variabel basis yang ada untuk dijadikan variabel basis dalam tabel berikutnya. Menentukan kunci 1 yaitu:

Kunci 1.a Kasus Maksimisasi	Variabel basis yang nilainya pada basis z merupakan bilangan negatif terbesar.
Kunci 1.b. Kasus Minimisasi	Variabel basis yang nilainya pada basis z merupakan bilangan positif terbesar.

Pada program POM-QM untuk kunci satu adalah sebagai berikut:

Kunci 1.a. Kasus Maksimisasi	Variabel basis yang nilainya pada baris-z merupakan bilangan positif terbesar
Kunci 1.b. kasus minimisasi	Variabel basis yang nilainya pada baris-z merupakan bilangan negatif terbesar.

4) Tentukan satu variabel keluar diantara variabel-variabel untuk menjadi basis yang ada untuk menjadi variabel basis dalam tabel berikutnya. Menentukan kunci 2 yaitu.

Kunci 2 Variabel basis yang memiliki rasio solusi dengan nilai positif terkecil.

Kolom yang mengandung variabel masuk dinamakan kolom kunci, sedangkan baris yang mengandung variabel keluar dinamakan baris kunci. Unsur di dalam tabel yang merupakan perpotongan antara baris kunci dan kolom kunci dinamakan unsur kunci. Variabel masuk akan menggantikan variabel keluar dalam tabel yang berisi variabel basis berikutnya. Rasio solusi adalah hasil bagi dari konstanta pada kolom *s* dengan unsur sebaris pada kolom kunci. Jika menentukan variabel keluar atau baris kunci abaikan rasio solusi yang bernilai nol dan negatif baik untuk kasus maksimisasi maupun minimalisasi.

5) Bentuk tabel berikutnya mensubsitusikan variabel ke variabel basis dan mengeluarkan variabel keluar dari kolom variabel basis serta lakukan transformasi baris-baris kolom termasuk baris-z.

Transformasi baris kunci yang sekarang bervariabel basis baru dilakukan sebagai berikut.

$$\mathbf{baris\ kunci\ baru} = \frac{\mathbf{baris\ kunci\ lama}}{\mathbf{unsur\ kunci\ (pivot)}}$$

Sedangkan transformasi baris-baris lainnya adalah:

$$\textbf{Baris baru} = \textbf{baris lama} - (\textbf{unsur pada kolom kunci} \times \textbf{baris kunci baru})$$

6) Lakukan pengujian optimalisasi. Jika semua koefisien variabel basis pada baris-*z* sudah tidak ada lagi yang negatf untuk kasus maksimisasi atau sudah tidak ada lagi yang positif untuk kasus minimalisasi, berarti solusi sudah optimal tidak perlu dibentuk tabel selanjutnya. Jika masih berarti solusi belum optimal ulangi lagi langkah ke-3 sampai ke-6.

Contoh 2.7

Misal x_1, x_2, x_3 (dalam unit) adalah banyak jenis produk I, II dan II yang akan diproduksi suatu perusahaan dan akan memaksimumkan keuntungan $z = 8x_1 + 9x_2 + 4x_3$ (dalam \$) dengan kendala $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 3, 7x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 8, x_1, x_2, x_3 \geq 0$. Model standar dari masalah tersebut adalah memaksimumkan $z - 8x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 0$ dengan kendala $x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 2, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + s_2 = 3, 7x_1 + 6x_2 + 2x_3 + s_3 = 8, x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$.

Model yang sudah standar ini bisa langsung diterjemahkan menjadi tabel pertama, dengan menempatkan variabel-variabel semu (dalam hal ini variabel pengetat) s_1, s_2 serta s_3 sebagai variabel-variabel basis.

VB	$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	x_3	s_1	s_2	s_3	$\boldsymbol{s}$	
$\boldsymbol{z}$	1	-8	-9	-4	0	0	0	0	**Persamaan** $-z$
s_1	0	1	1	2	1	0	0	2	**Persamaan** -s_1
s_2	0	2	3	4	0	1	0	3	**Persamaan** $-s_2$
s_3	0	7	6	2	0	0	1	8	**Persamaan** -s_3

Tabel 2.10.a Simpleks Contoh 2.7

Pada tahap ini x_1, x_2 dan x_3 merupakan variabel-variabel basis, sebab tidak tercantum pada kolom VB. Langkah kita yang berikut ini adalah menentukan variable masuk dan variabel keluar agar dapat membentuk tabel berikutnya. Dalam kasus maksimisasi ini variabel masuknya adalah x_3 karena nilainya pada baris z paling negatif. Konsekuensinya, kolom x_3 merupakan kolom kunci. Dari sini bisa dihitung rasio solusi untuk masing-masing variabel basis. Rasio solusi untuk s_1 adalah $\frac{2}{1} = 2,$ untuk s_2 adalah $\frac{3}{3} = 1,$ untuk s_3 adalah $\frac{8}{6} = 1{,}333.$ Karena rasio solusinya paling kecil maka s_2 merupakan variabel keluar dan konsekuensinya barisnya merupakan baris kunci.

Karena telah ditentukannya baris kunci dan kolom kuncimaka unsur kunci bisa ditetapkan, sehingga,

VB	$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	x_3	s_1	s_2	s_3	$\boldsymbol{s}$	
$\boldsymbol{z}$	1	-8	-9	-4	0	0	0	0	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	2	**Rasio solusi =2**
s_2	0	2	3	4	0	1	0	3	**Rasio solusi = 1 (terkecil)**
s_3	0	7	6	2	0	0	1	8	**Rasio solusi = 1,333**

Tabel 2.10.b. Simpleks Contoh 2.7

Transformasi baris (x_2 menggantikan s_2).

$$x_2 \quad \frac{0}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{0}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{0}{3} \quad \frac{3}{3}$$

x_2	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1

Transformasi nilai bebas lainnya:

Baris-z

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & -8 & -9 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
-9 & (0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{1}) & - \\
\hline
 & 1 & -2 & 0 & 8 & 0 & 3 & 0 & 9 &
\end{array}$$

Baris -s_1

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\
1 & (0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{1}) & - \\
\hline
 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 2 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 &
\end{array}$$

Baris-s_3

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 0 & 7 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 & \\
6 & (0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{1}) & - \\
\hline
 & 0 & 3 & 0 & -6 & 0 & -2 & 1 & 2 &
\end{array}
$$

VB	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s	
z	1	-2	0	8	0	3	0	9	
s_1	0	1/3	0	2/3	2	-1/3	0	1	**Rasio solusi =3**
x_2	0	2/3	1	4/3	0	1/3	0	1	**Rasio solusi = 3/2**
s_3	0	3	0	-6	0	-2	1	2	**Rasio solusi = 2/3 (terkecil)**

Tabel 2.11 iterasi 1

Karena nilai baris z di bawah variabel x_1 masih negatif, maka tabel belum optimal. Lanjutkan ke iterasi-2, yaitu: transformasi baris kunci (x_1 menggantikan s_3).

$$
x_1 \quad \frac{0}{3} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{0}{3} \quad -\frac{6}{3} \quad \frac{0}{3} \quad -\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}
$$

x_1	0	1	0	-2	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Transformasi nilai baris lainnya:

Baris-z

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & -2 & 0 & 8 & 0 & 3 & 0 & 9 & \\
2 & (0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}) & - \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{31}{3} &
\end{array}
$$

Baris-s_1

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\
1 & (0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}) & - \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{7}{9} &
\end{array}
$$

Baris-x_2

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 0 & 2/3 & 1 & 4/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1 & \\
1 & (0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}) & - \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} & 0 & \frac{7}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} &
\end{array}
$$

VB	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s
z	1	0	0	4	0	5/3	2/3	31/3
s_1	0	0	0	4/3	1	-1/9	1/9	$7/9$
x_2	0	0	1	4/3	0	1/3	0	1
s_3	0	1	0	-2	0	-2/3	1/3	2/3

Tabel 2.12 iterasi 2

Tabel sudah optimal, karena variabel-variabel pada baris-z sudah tidak ada lagi yang negatif, sehingga perhitungan iterasi di hentikan.

Dari data di atas dapat diambil suatu kesimpulan yang dihasilkan pada solusi tahap terakhir dapat dibaca langsung dari tabel optimal. Baris-baris yang bersesuaian pada kolom VB dan kolom s menunjukkan $z = \frac{31}{3}, s_1 = \frac{7}{3}, x_2 = \frac{5}{9}$ dan $x_1 = \frac{2}{3}$. Berarti untu mendapatkan keuntungan yang maksimum sebesar $\$\frac{31}{3}$, maka perusahaan harus menghasilkan produk x_1 sebesar $\frac{2}{3}$ unit dan produk x_2 sebesar $\frac{5}{9}$ unit.

Variabel semua yang tidak tercantum di kolom VB dalam tabel optimal mengandung arti bahwa semua kendala yang diwakilinya merupakan sumber daya habis terpakai. Dalam hal ini kendala $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 3$ dan $7x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 8$ merupakan sumber daya habis terpakai, melihat s_1 dan s_2 tidak tercantum pada kolom VB. Sedangkan variabel semu yang tercantum di kolom VB mengandung arti bahwa kendala yang diwakilinya merupakan sumber daya berlebih. Dalam hal ini sumber daya berlebih adalah kendala $x_2 + x_2 + 2x_3 \leq 2$, melihat s_1 tercantum di kolom VB.

C. Pengunaan POM-QM

POM-QM adalah perangkat lunak yang biasa digunakan pada bidang manajemen operasioanl, metode kuantitatif atau riset operasi POM-QM dirancang untuk membantu dalam mempelajari dan memahami permasalahan pada bidang operasional. Perangkat ini dapat digunakan baik untuk memecahkan masalah atau untuk memeriksa jawaban yang telah diselesaikan secara manual. POM-QM berisi sejumlah model dan sebagian besar masalah yang ada pada bidang operasional.

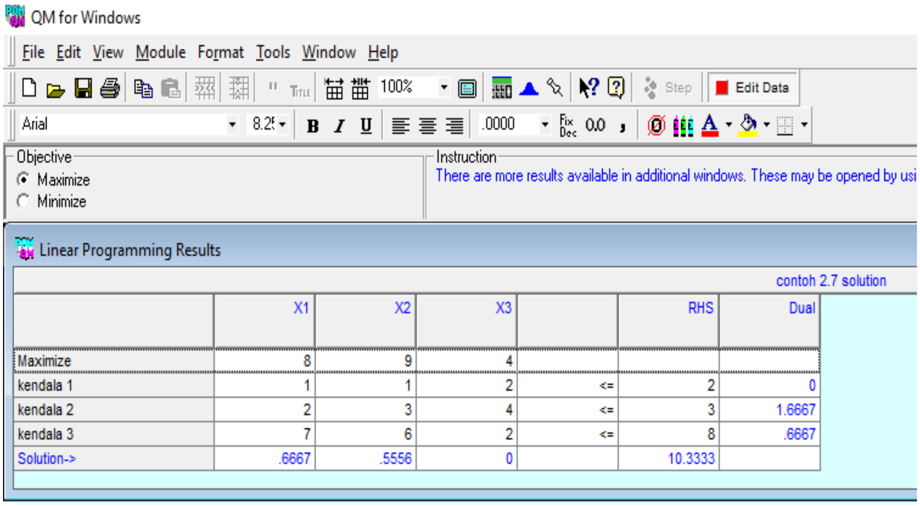
POM-QM memiliki banyak fitur-fitur di dalamnya dan memiliki kegunaan masing-masing fitur. Secara lebih dalam dapat dijelaskan sebagai berikut:
(penggunaan POM-QM untuk contoh 2.7)

1. *Linear Programs*

Nilai optimal untuk variabel. Dibawah setiap kolom nilai-nilai optimal untuk variabel akan ditampilkan. Dalam contoh ini x_1 harus 0.6667, x_2 harus 0.5556 dan x_3 harus 0.

Biaya yang optimal atau keuntungan. Di bawah kanan pojok meja keuntungan maksimum atau biaya minimum akan ditampilkan. Dalam contoh ini keuntungan maksimum adalah $10.3333.

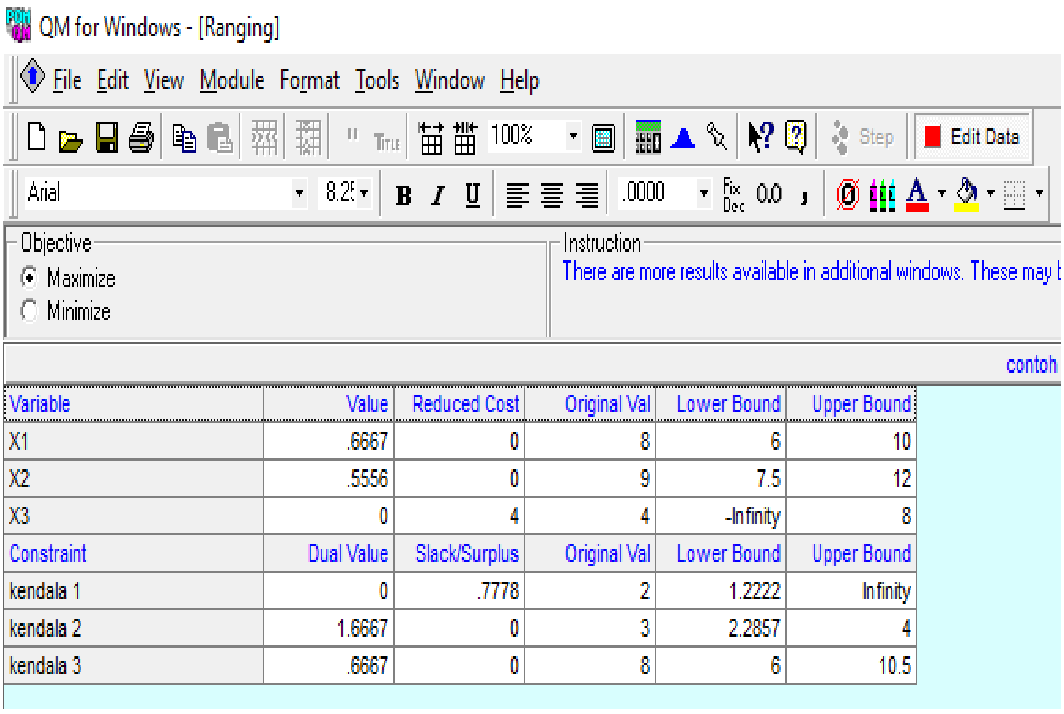
Harga bayangan atau dual harga muncul disebelah kanan setiap kendala. Dalam contoh ini keuntungan akan meningkat sebesar 0 untuk satu unit lagi sumber daya 1, 1.6667 untuk satu unit lagi sumber daya 2 dan 0.6667 untuk satu unit lagi sumber daya 3.



Gambar 2.8 *linear programing result* contoh 2.7

2. *Ranging*

Selain daftar nilai-nilai, informasi tambahan tentang variabel juga disediakan pada aplikasi ini. Dalam contoh ini dapat dilihat biaya yang berkurang, koefisien nilai objektif asli, batas atas dan batas bawah dimana solusi akan sama. Variabel akan mengambil nilai-nilai yang sama dari 0.6667, 0.5556dan 0, hanya nilai fungsi tujuan akan berubah.

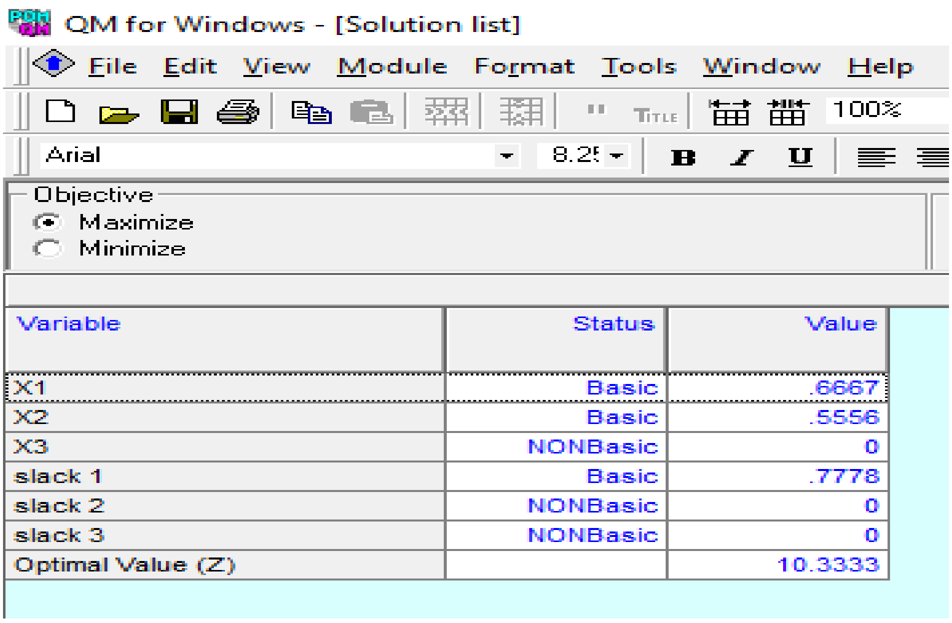


Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
X1	.6667	0	8	6	10
X2	.5556	0	9	7.5	12
X3	0	4	4	-Infinity	8
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
kendala 1	0	.7778	2	1.2222	Infinity
kendala 2	1.6667	0	3	2.2857	4
kendala 3	.6667	0	8	6	10.5

Gambar 2.9 *Ranging* contoh 2.7

3. *Solution List*

Tabel ini untuk menampilkan penyelesaian soal yang disajikan dalam daftar.

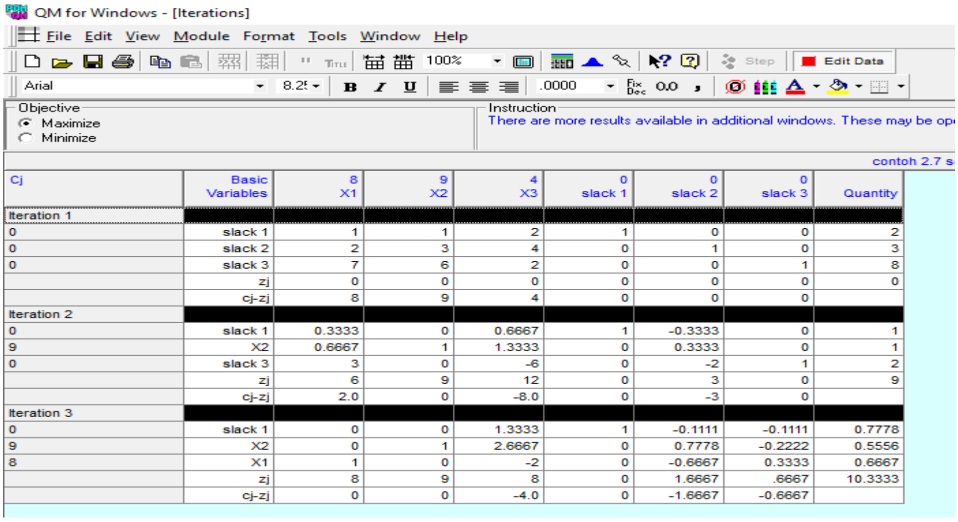


Variable	Status	Value
X1	Basic	.6667
X2	Basic	.5556
X3	NONBasic	0
slack 1	Basic	.7778
slack 2	NONBasic	0
slack 3	NONBasic	0
Optimal Value (Z)		10.3333

Gambar 2.10 *Solution List* contoh 2.7

4. *Iterasi*

Tabel ini untuk menampilkan proses penyelesaian masalah pada contoh 2.7.



Cj	Basic Variables	8 X1	9 X2	4 X3	0 slack 1	0 slack 2	0 slack 3	Quantity
Iteration 1								
0	slack 1	1	1	2	1	0	0	2
0	slack 2	2	3	4	0	1	0	3
0	slack 3	7	6	2	0	0	1	8
	zj	0	0	0	0	0	0	0
	cj-zj	8	9	4	0	0	0	
Iteration 2								
0	slack 1	0.3333	0	0.6667	1	-0.3333	0	1
9	X2	0.6667	1	1.3333	0	0.3333	0	1
0	slack 3	3	0	-6	0	-2	1	2
	zj	6	9	12	0	3	0	9
	cj-zj	2.0	0	-8.0	0	-3	0	
Iteration 3								
0	slack 1	0	0	1.3333	1	-0.1111	-0.1111	0.7778
9	X2	0	1	2.6667	0	0.7778	-0.2222	0.5556
8	X1	1	0	-2	0	-0.6667	0.3333	0.6667
	zj	8	9	8	0	1.6667	.6667	10.3333
	cj-zj	0	0	-4.0	0	-1.6667	-0.6667	

Gambar 2.11 *Iteration*

D. PENELITIAN YANG RELEVAN

1. Kusrini penelitiannya yang berjudul “Aplikasi Untuk Menyelesaikan Program Linear dengan Menggunakan Metode Simpleks” pada tahun 2006 dalam jurnal seminar national aplikasi teknologi informasi melakukan penelitian pada suatu perusahaan dalam pengambilan keputusan untuk memaksimumkan keuntungan perusahaan dengan keterbatasan sumber daya yang ada dengan menggunakan metode simpleks.

   Adapun permasalahan yang ada pada perusahaan sebagai berikut perusahaan barang tembikar Colonial memproduksi 2 produk setiap hari, yaitu mangkok dan cangkir. Perusahaan mempunyai 2 sumber daya yang terbatas jumlahnya untuk memproduksi produk-produk tersebut yaitu tanah liat dan tenaga kerja. Dengan keterbatasan sumber daya, perusahaan ingin mengetahui berapa banyak mangkok dan cangkir yang akan diproduksi tiap hari dalam rangka memaksimumkan laba. Tersedia 40 jam tenaga kerja dan 120 kg tanah liat setiap hari untuk di produksi. Produk mangkok membutuhkan 1 jam/unit tenaga kerja dan 3 kg/unit tanah liat dengan laba Rp4000,-/unit. Produk cangkir 2 jam/unit tenaga kerja dan 2 kg/unit tanah liat dengan laba Rp5.000,-/unit.

Model matematika secara lengkap dari penelitian ini sebagai berikut:

$$Z = 4000x_1 + 5000x_2$$

dengan Z adalah total laba tiap hari, x_1 adalah jumlah mangkok yang diproduksi/hari dan x_2 adalah jumlah cangkir yang diproduksi/hari.

Jumlah produksi mangkok per hari adalah 40, jumlah produksi cangkir perhari adalah 0 dengan keuntungan yang akan diperoleh perusahaan sebesar Rp160.000,-. Semua sumber daya tenaga kerja dan tanah lihat dibutuhkan untuk produksi.

Penelitian ini sama dengan penelitian dan dilakukan peniliti yaitu sama-sama menggunakan metode simplek hanya berbeda bidang perusahaan.

2. Ni Luh Gede Pivin Suwirmayanti penelitiannya yang berjudul "Aplikasi Optimalisasi Produksi Menggunakan Metode Simpleks Berbasis Web" pada tahun 2018 dalam jurnal techino Vol 17, N0.1 Februari 2018: 61-69 melakukan penelitian pada UKM Gerabah dalam memaksimumkan laba perusahaan.

Aplikasi optimalisasi produksi menggunakan metode simpleks untuk berbasis Web ini terdapat beberapa proses diantaranya cetak laporan rekap penjualan, hasil perhitungan dengan proses optimasi produksi, pengolahan data master, penngolahan data transaksi penjualan serta mencetak nota penjualan. Aplikasi ini terdapat pada fitur perhitungan optimalisasi produksi dengan menentukan keuntungan produksi yang akan diperoleh pada periode berikutnya.

Penerapan metode simpleks pada UKM Teracotta dengan menggunakan beberapaa variabel diantaranya jumlah jam kerja yang dibutuhkan untuk setiap jenis produk, jumlah tanah liat yang dibutuhkan untuk setiap jenis produk, jumlah laba tau keuntugan untuk setiap jenis produk, batasan jam kerja, batasan bahan baku tanah liat.

3. Zuhria Nasution dkk penelitiannya yang berjudul "Penerapan Metode Simpleks untuk Menganalisa Persamaan Linear dalam Menghitung Keuntungan Maksimum" pada tahun 2016 dalam jurnal riset computer vol.3 No.4 agustus 2016 melakukan penelitian menggunakan metode simpleks dalam proses perhitungan keuntungan maksimum. Alat bantu analisis dan perancangan meliputi *uses case diagram, activity diagram*. Perangkat lunak pendukung yang digunakan adalah *Microsoft visual basic, net 2008* dan *Microsoft access 2007*.

   Contoh kasus yang digunakan sebagai berikut penjahit professional Erwin Camoli mendapatkan pesanan 2 janis kameja wanita pendek ukuran standart yaitu:

1. Baju kameja sifon pendek membutuhkan 1,25 m kain sifon 0,75 untuk kain lapis perpotongannya.
2. Baju kaos oblong membutuhkan 1,15m kain kaos 0,75 kain lapis perpotongan.

Persediaan untuk kameja pendek 35m dan untuk kaos oblong 35m. berapakah keuntungan yang didapat Erwin jika dilihat dari persediaan barang diatas apabila keuntungan dalam perpotongan Rp40.000,- untuk baju kameja pendek dan Rp35.000,- untuk kaos oblong.

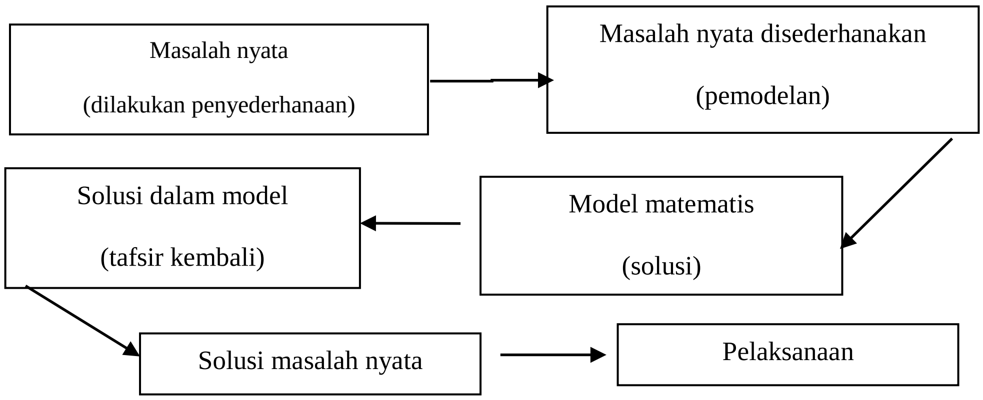
Keuntungan maksimum yang diperoleh oleh Erwin adalah Rp1.963.000,- dengan memproduksi $29x_1$ (kameja sifon pendek kain oblong).

4. Desiana Shintia Dewi dkk dalam penelitiannya yang berjudul "Analisis Sensitivitas dalam Optimalisasi Keuntungan Produksi Busana dengan Metode Simpleks" pada tahun 2014 dalam jurnal matematika vol.4 No.2 Desember 2014 melakukan penelitian pada industi garmen yaitu industri yang memproses bahan baku kain menjadi suatu produk siap pakai seperti busana.

Data yang diguanakan dalam penelitian ini adalah data kuantitatif, yaitu data Panjang kain dan lebar kain (dalamm cm), persediaan bahan, harga beli masing-masing kain, harga jual dari masing-masing jenis busana, jam kerja perhari, waktu pembuatan busana, banyaknya tenaga kerja, upah dan persediaan upah tenaga kerja sera data banyaknya produksi masing-masing jenis busana.

Setelah dilakukan penerapan metode simpleks, keuntungan maksimal yang diperoleh Garmen dalam sehari meningkat sebesar $Rp865.264,-$ dari $Rp1.027.920,-$ menjadi $Rp1.893.184,-$ dengan banyak produksi dress paying 34 buah, celana aladin XL 68 buah, celana aladin XXL 60 buah, celana aladin ¾ 96 buah, dress kerut 26 buah dan daster haji 26 buah.

E. KERANGKA PEMIKIRAN



Gambar 2.12 Bagan langkah-langkah secara umum memodelkan masalah

Masalah nyata dalam kehidupan sehari-hari banyak yang dapat diselesaikan secara matematis. Masalah ada untuk diselesaikan atau setidaknya mengurangi permasalahan yang ada sehingga bisa dilakukan tindakan. Masalah nyata tersebut disederhakan kedalam bentuk persamaan matematika yang dikenal dengan model matematik. Model adalah abstraksi dan penyederhanaan masalah dari keadaan nyata. Model harus mampu merangkum unsur-unsur yang sangat pokok dari persoalan yang hadapi, model harus dibuat sederhana mungkin sesuai dengan kemampuan yang ada dan sesuai dengan pentingnya permasalahan yang dihadapi dan yang terakhir adalah model tersebut harus mampu tidak memperdulikan hal-hall yang kurang berguna.