Universitas Mercu Buana Yogyakarta

Jl. Wates Km. 10 Yogyakarta 55753.
Telp : 0274 - 6498212, 6498211
Fax: 0274 - 6498213
Webmaster : ict@mercubuana-yogya.ac.id

gramasurya

9 786025 888427

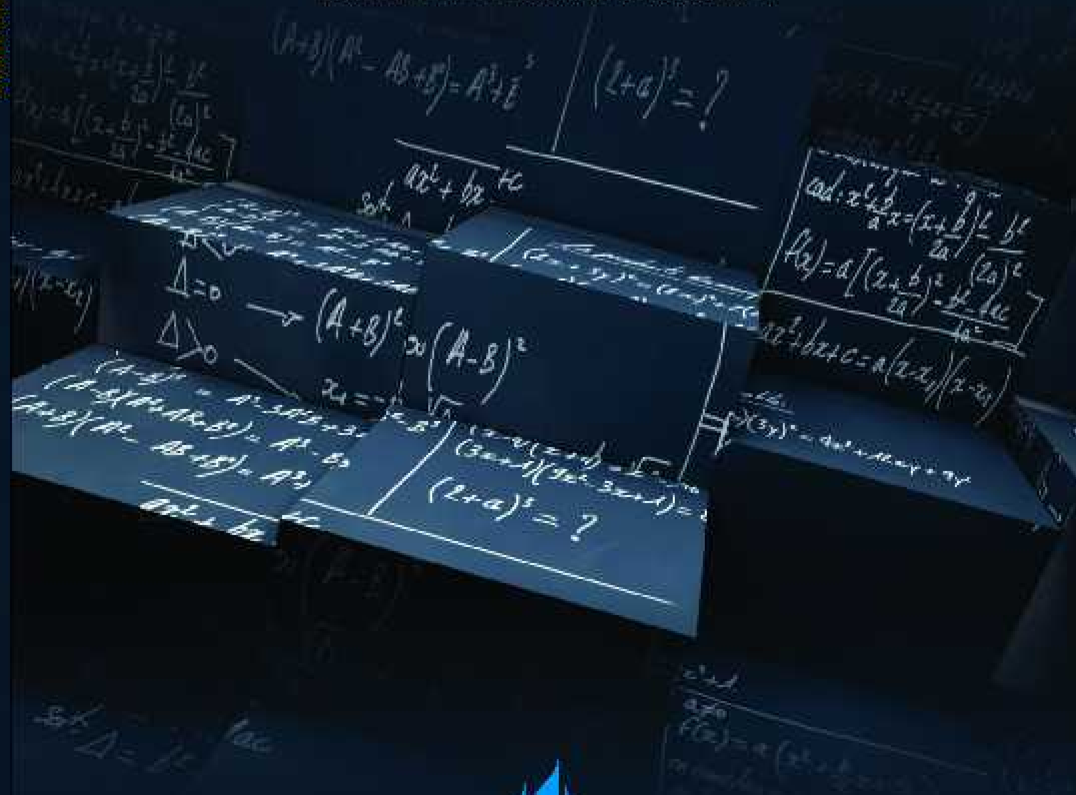
Nuryadi, S.Pd.Si, M.Pd

PENGANTAR PERSAMAAN DIFERENSIAL ELEMENTER DAN PENERAPANNYA

Nuryadi, S.Pd.Si, M.Pd

PENGANTAR

PERSAMAAN DIFERENSIAL ELEMENTER DAN PENERAPANNYA



UNIVERSITAS MERCU BUANA YOGYAKARTA

PERSAMAAN DIFERENSIAL ELEMENTER

Nuryadi, S.Pd.Si, M.Pd

PERSAMAAN DIFERENSIAL ELEMENTER

Penebar Media Pustaka

PERSAMAAN DIFERENSIAL ELEMENTER

Penulis : **Nuryadi, S.Pd.Si, M.Pd**
Layout : **Kirman**[gs]
Sampul : **Aris**[gs]

Diterbitkan oleh:
Penebar Media Pustaka
Alamat : Jl. Samas km 1, Palbapang, Bantul, Bantul, Yogyakarta, 55713.
Hp. : 085643895795
E-mail : penebarcom@gmail.com

Katalog Dalam Terbitan (KDT)
Nuryadi, S.Pd.Si, M.Pd, Persamaan Diferensial Elementer;
—Cetakan 1—Yogyakarta:
Penebar Media Pustaka, 2018
viii + 112; 14 x 21 cm

ISBN: **978-602-5888-42-7**

Dicetak Oleh
PT Gramasurya
Jl. Pendidikan No. 88 Yogyakarta 55182
Telp./Fax. 0274-377102
E-mail: info@gramasurya.com

Cetakan 1, **September 2018**

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya atas kelancaran sehingga penulis dapat menyelesaikan buku yang berjudul " Pengantar Persamaan Diferensial Elementer dan Penerapannya" semoga dengan dibuatkan buku ini pembaca dapat memahami tentang definis, teorema, dan pernyataan secara detail dengan memperhatikan contoh-contoh soal yang mengiringinya. Cobalah untuk menjawab soal-soal yang ada pada setiap akhir bab. Silahkan belajar kelompok sebagai sarana diskusi sekaligus untuk menghilangkan rasa jenuh.

Struktur buku ini lebih mengarah pada pengantar sehingga tidak banyak menggunakan prasyarat. Pada BAB I diperkenalkan konsep dasar persamaan diferensial. Pada BAB II memperkenalkan persamaan diferensial separabel dan reduksi ke persamaan separabel. Pada BAB III memperkenalkan suatu persamaan diferensial eksak dan faktor integrasi yang digunakan jika suatu persamaan diferensial non eksak. Pada BAB IV kajian dalam buku ini sudah mengarah ke persamaan diferensial Homogen orde pertama. Pada BAB V dibahas mengenai suatu persamaan diferensial linier orde satu.

Kajian-kajian persamaan orde dua terdapat pada Bab VI, VII, dan VIII. Sedangkan aplikasi persamaan diferensial akan dikaji dan dibahas pada Bab IX dan Bab X. Pada BAB

VI dibahas jenis-jenis persamaan diferensial orde satu salah satunya persamaan diferensial bernoulli dan Riccati. Pada BAB VII di kaji persamaan diferensial linier homogen orde 2 dengan koefisien konstan. Pada BAB VIII dikaji sebagai pembanding dari persamaan diferensial linier homogen, yaitu persamaan diferensial linier non homogen orde dua. Sedangkan Pada BAB IX akan dibahas aplikasi persamaan diferensial biasa dengan *transformasi Laplace*, sedangkan Bab X membahas mengenai aplikasi persamaan diferensial dalam kehidupan sehari-hari. Berbagai sumber referensi dasar dan esensial yang relevan dari artikel ilmiah, buku, dari website memang sengaja dipilih dan digunakan untuk memperkuat pembahasan dan membangun kerangka penyajian yang komprehensif agar mudah dipahami dan dapat memenuhi harapan pembaca.

Akhirnya, diharapkan semoga buku ini bermanfaat bagi pembaca khususnya mahasiswa. Penulis juga mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun demi pembuatan buku selanjutnya yang masih berhubungan dengan persamaan diferensial.

Nuryadi
Yogyakarta
September 2018

DAFTAR ISI

BAB I
KONSEP DASAR PERSAMAAN DIFERENSIAL 1
A. Pengertian Persamaan Diferensial.....................................1
B. Persamaan Diferensial Biasa (PDB)...................................6

BAB II
PERSAMAAN DIFERENSIAL SEPARABEL DAN REDUKSI KE PERSAMAAN SEPARABEL 15
A. Persamaan Diferensial Separabel 15
B. Persamaan Diferensial Separabel 18

BAB III
PERSAMAAN DIFERENSIAL EKSAK DAN FAKTOR INTEGRASI 29
A. Persamaan Diferensial Eksak 29
B. Persamaan Diferensial Non Eksak.................................. 36

BAB IV
PERSAMAAN DIFERENSIAL HOMOGEN ORDE PERTAMA..... 41
A. Persamaan Diferensial Homogen.................................. 41
B. Persamaan Diferensial Non Homogen Bentuk Khusus ... 46

BAB V
PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER ORDE SATU 55

BAB VI
PERSAMAAN DIFERENSIAL BERNOULLI DAN RICCATI 63
A. Persamaan Diferensial Bernoulli..................................... 63
B. Persamaan Diferensial Riccati... 65

BAB VII
PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER HOMOGEN DENGAN KOEFISIEN KONSTAN.. 71
Persamaan Diferensial Linier Homogen Orde 2 71

BAB VIII
PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER NON HOMOGEN ORDE DUA.. 79
Metode Variasi Paramater 85

BAB IX
TRANSFORMASI LAPLACE PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA.. 91
Rumus Inversi Penting Yang Lain.. 94

BAB X
PENERAPAN PERSAMAAN DIFERENSIAL............................... 99
A. Pertumbuhan Dan Peluruhan 99
B. A Discrete One Species Model...................................... 103

DAFTAR PUSTAKA...111

BAB I
KONSEP DASAR PERSAMAAN DIFERENSIAL

A. Pengertian Persamaan Diferensial

SEJARAH SINGKAT PERKEMBANGAN PERSAMAAN DIFERENSIAL

Studi mengenai persamaan diferensial dimulai segera setelah penemuan Kalkulus dan Integral. Pada tahun 1676 Newton menyelesaikan sebuah persamaan diferensial dengan menggunakan deret tak hingga, sebelas tahun setelah penemuannya tentang bentuk fluksional dari kalkulus diferensial pada tahun 1665. Newton tidak mempublikasikan hal tersebut sampai dengan tahun 1693, pada saat Leibniz menghasilkan rumusan persamaan diferensial yang pertama.

Perkembangan persamaan diferensial sangat pesat dalam tahun-tahun berikutnya. Dalam tahun 1694-1697 John Bernoulli menjelaskan "Metode Pemisahan Variabel" dan membuktikan bahwa persamaan diferensial homogen orde satu dapat direduksi menjadi bentuk persamaan diferensial dengan variabel-variabel yang dapat dipisahkan. John Bernoulli dan saudaranya Jacob Bernoulli (yang menemukan Persamaan Diferensial Bernoulli) berhasil menyederhanakan sejumlah besar persamaan diferensial menjadi bentuk yang lebih sederhana yang dapat mereka selesaikan. Faktor integrasi yang *kemungkinan* ditemukan secara terpisah oleh Euler (1734) dan Fontaine dan Clairaut melalui beberapa pengkajian yang mereka lakukan terhadap penemuan Leibniz. Penyelesaian tunggal yang diperkenalkan oleh Leibniz (1694) dan Brook Taylor (1715) secara umum berkaitan dengan nama Clairaut (1734). Interpretasi geometris ditemukan oleh Lagrange (1774) namun teori dalam bentuk diferensial tidak dijelaskan sampai tahun 1872 ketika Cayley dan M.J.M. Hill (1888) merumuskan diferensial geometri.

Metode pertama yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde kedua atau yang lebih tinggi dengan koefisien konstan, dirumuskan oleh Euler. D'Alembert merumuskan penyelesaian persamaan diferensial untuk kasus dimana persamaan bantuan mempunyai akar-akar yang sama. Beberapa metode simbolis untuk menentukan integral khusus belum dapat dijelaskan sampai sekitar seratus tahun kemudian, setelah Lobatto (1837) dan Boole (1859) merumuskan hal tersebut.

Persamaan diferensial parsial diketahui pertama kali muncul dalam persoalan getaran pada tali. Persamaan ini, merupakan persamaan diferensial orde kedua, telah dibicarakan oleh Euler dan D'Alembert dalam tahun 1747. Lagrange menyempurnakan penyelesaian dari persamaan tersebut kemudian menggunakannya juga untuk menelaah persamaan diferensial parsial orde pertama dalam tahun

1772 dan 1785. Lagrange berhasil merumuskan bentuk umum integral dari persamaan diferensial linier dan mengklasifikasikan bentuk-bentuk integral yang berbeda jika persamaan diferensialnya tidak linier.

Teori-teori yang berhubungan dengan persamaan diferensial belum berhenti sampai di situ. Perkembangan selanjutnya masih terus diupayakan oleh Chrystal (1892) dan Hill (1917). Metode-metode lain yang diterapkan untuk menjelaskan persamaan diferensial parsial orde pertama, diberikan oleh Charpit (1784) dan Jacobi (1836). Penelahaan yang paling penting untuk persamaan dengan orde yang lebih tinggi, dilakukan oleh Laplace (1773), Monge (1784), Ampere (1814), dan Darboux (1870).Sejak tahun 1800, subjek persamaan diferensial dalam konteks aslinya (secara matematis), yaitu penyelesaian dalam bentuk yang hanya mengandung sejumlah berhingga fungsi (atau integral) yang diketahui, kurang lebih sama dengan dengan yang kita jumpai sampai abad ini. Tahun 1823, Cauchy membuktikan bahwa deret tak hingga yang didapatkan dari sebuah persamaan diferensial, merupakan suatu deret yang konvergen sehingga dapat dinyatakan dalam bentuk sebuah fungsi yang memenuhi persaman (diferensial) tersebut.

Dalam pelajaran kalkulus, kita telah berkenalan dan mengkaji berbagai macam metode untuk mendiferensialkan suatu fungsi (dasar). Sebagai contoh, derivative dari fungsi $y = \log(x)$ berturut-turut diberikan oleh

$$y' = \frac{1}{x}, \qquad y'' = -\frac{1}{x^2}, \qquad y''' = \frac{2}{x^3} \text{ dst}$$

Dimana $y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ dan seterusnya. Kita juga telah diperkenalkan dengan aturan dan metode mendiferensialkan fungsi dari dua variable atau lebih. Derivatifnya disebut derivative parsial. Persamaan yang memuat derivative parsial disebut persamaan diferensial parsial. Misalkan $u = x^2 + 3xy - e^{2x+3y}$, derivatifnya terhadap x dan y berturut-turut diberikan oleh

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y - 2e^{2x+3y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3x - 3e^{2x+3y}$$

Pengertian: Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang menyatakan hubungan fungsi yang tidak di ketahui dan turunan-turunannya.

Definisi 1: Misalkan $f(x)$ mendefinisikan sebuah fungsi dari x pada suatu interval $I[a, b]$ dimana $a \le x \le b$. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat derivative dari $f(x)$.

Definisi 2: Orde dari suatu persamaan diferensial adalah orde tertinggi derivative yang termuat dalam persamaan itu.

Pada kuliah kalkulus, kita telah belajar bagaimana menentukan derivative (turunan) $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$ dari suatu fungsi $y = f(x)$. Misalkan, jika

$$y = 2e^{-x} + \cos 3x ,$$

Ingat !!!

- $y = e^x \rightarrow y' = e^x.\frac{d(x)}{dx} = e^x$
- $y = 2e^{-x}$ maka

  $\frac{dy}{dx} = 2.e^{-x}.\frac{d(-x)}{dx}$

  $= 2.e^{-x}.-1$

  $= -2e^{-x}$
- $y = sin\,ax \rightarrow y' = acos\,ax$
- $y = cos\,3x \rightarrow y' = -3.sin\,3x$

  $\frac{dy}{dx} = -2e^{-x} - 3\,sin\,3x.........(1)$

Atau jika diberikan persamaan dalam bentuk $g(x, y) = C$ dengan C konstanta, kita dapat mendiferensialkan secara implisit untuk memperoleh $\frac{dy}{dx}$. Misalkan dipunyai fungsi implisit

$x^2 + y^2 = 9$

Maka akan diperoleh

$$\frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} = 0$$

$$\frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dy}.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + 2y.\frac{dy}{dx} = 0$$

Atau

$$2y.\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad (2)$$

Persamaan (1) dan (2) diatas merupakan contoh **Persamaan Diferensial**. Penyelesaian suatu persamaan diferensial ialah mencari suatu fungsi yang tidak memuat turunan dan memenuhi persamaan diferensial yang diberikan. Penyelesaian dapat saja dilakukan satu atau beberapa kali integrasi.

B. Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Jika hanya ada satu peubah bebas, maka disebut **Persamaan Diferensial Biasa** (PDB). Contoh PDB adalah sebagai berikut:

- $\frac{dy}{dx} + 4xy = 2e^{2x}$
- $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 3y = \sin x$
- $y\,dy - xy\,dx = 0$

Sedangkan jika persamaan memuat dua atau lebih peubah bebas, maka disebut **Persamaan Diferensial Parsial** (PDP). Misalkan :

- $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} - 2v = 0$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

BENTUK PDB :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f(x, y)}}$$

di mana solusi atau penyelesaian dari PD tersebut merupakan suatu fungsi eksplisit $y = f(x)$.

Bentuk PDB orde n :

$$\boxed{\boldsymbol{y^n = f(x, y, y', y'', \dots \dots y^{n-1})}} \qquad (3)$$

yang menyatakan adanya keterkaitan antara peubah bebas x dan peubah tak bebas y beserta turunan-turunannya dalam bentuk persamaan yang identic nol. Beberapa buku menuliskan persamaan ini dalam bentuk :

$f(x, y, y', y'', \dots \dots y^{n-1}, y^n) = 0$.

Order dari persamaan diferensial adalah order tertinggi dari turunan yang ada dalam persamaan. Misalkan

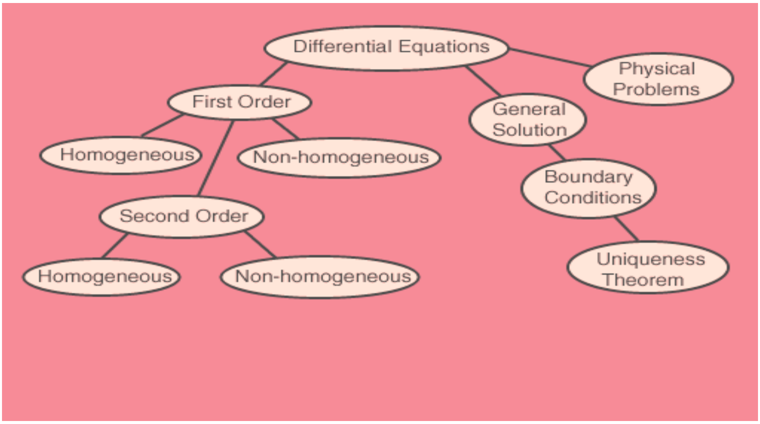
$$\frac{dy}{dx} + 2xy = \sin x$$

Adalah persamaan diferensial order satu, sedangkan

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

Merupakan persamaan diferensial order dua.

Persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equation*) seperti berikut :



PENYELESAIAN PDB

Masalah kita selanjutnya adalah bagaimana menemukan penyelesaian PDB, yaitu suatu fungsi $y(x)$ yang memenuhi PDB tersebut.

> **Definisi:** suatu fungsi $y(x)$ yang didefinisikan pada suatu interval disebut penyelesaian PDB jika secara identic memenuhi persamaan (3) pada interval yang diberikan.

Contoh 1:

Fungsi$y = ke^x$ adalah penyelesaian persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = y$ pada interval $-\infty < x < \infty$, karena $\frac{d}{dx}(ke^x) = ke^x$. Jadi jika disubstitusikan ke dalam persamaan diperoleh $ke^x = ke^x$, yang berlaku untuk semua x.

Tidak semua penyelesaian PDB dapat disajikan secara eksplisit seperti contoh 1. Beberapa kasus ditemukan penyelesaian yang disajikan dalam bentuk implisit, seperti pada contoh 2 berikut :

Contoh 2 :

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} + y$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -y$$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{y}dy = dx$

$\Leftrightarrow -\int \frac{1}{y}dy = \int dx$

$\Leftrightarrow -\ln y + C = x + C$

$\Leftrightarrow -\ln y = x + C$

$\Leftrightarrow x + \ln y + c = 0$

$\Leftrightarrow \ln y = -x - c$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln y} = e^{-x-c}$

$\Leftrightarrow \mathrm{y} = e^{-x}.e^{-c}$

$\Leftrightarrow \mathrm{y} = e^{-x}.c$

jadi solusi umum PDB : $\frac{dy}{dx} + y = 0$ adalah $\boldsymbol{y = e^{-x}.c}$

MASALAH NILAI AWAL

Misalkan kita akan mencari penyelesaian dari $y = y(x)$ dari PDB orde satu

$y' = f(x, y)$

Yang memenuhi $y(x_0) = y_0$

Contoh :

a. $y' = 2y, y(o) = 2$

Jawab :

$\frac{dy}{dx} = 2y$

$\frac{1}{2y}dy = dx$

$\int \frac{1}{2y}dy = \int dx$

$\frac{1}{2}\ln y + C = x + C$

$\frac{1}{2}\ln y - x + C = 0\ldots.,$ ingat $\log a^b = b \log a$

$\ln y^{\frac{1}{2}} = x + C$

$e^{\ln y^{\frac{1}{2}}} = e^{x+C}$

$y^{\frac{1}{2}} = e^x . e^c$

$y^{\frac{1}{2}} = e^x . c$

$y = (ce^x)^2$

karena syarat awal $y(0) = 2$ maka

$2 = (ce^0)^2$

$c^2 = 2$

$c = \sqrt{2}$

sehingga solusi umum PDB dengan syarat awal :

$y = \left(\sqrt{2}e^x\right)^2 \; atau \; y = 2e^{2x}$

b. $y' = \frac{x}{4y}$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{4y}$

$\Leftrightarrow 4y\, dy = x\, dx$

$\Leftrightarrow \int 4y\, dy = \int x\, dx$

$\Leftrightarrow 2y^2 + C = \frac{1}{2}x^2 + C$

$\Leftrightarrow 2y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C = 0$

Jadi solusi umum Persamaan Diferensial Biasa adalah :

$2y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C = 0$

$y = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + C}$

Latihan :

1. Selesaikan persamaan diferensial dibawah ini:

a. $\frac{xdy}{dx} + y = 1$

Jawab

$\Leftrightarrow x\frac{dy}{dx} + y = 1$

$\Leftrightarrow \frac{xdy}{dx} = 1 - y$

$\Leftrightarrow \frac{x}{1-y}dy = dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1-y}dy = \frac{1}{x}dx$

$\Leftrightarrow \int \frac{1}{1-y}dy = \int \frac{1}{x}dx$

$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{1}{1-y}\right| + \ln c = \ln x + \ln c$

$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{1}{1-y}\right| = \ln x + \ln C$

$\Leftrightarrow e^{\ln\frac{1}{1-y}} = e^{\ln xc}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1-y} = xc$

$\Leftrightarrow 1 = xc - xcy$

$\Leftrightarrow \frac{1}{xc} = 1 - y$

$\Leftrightarrow y = 1 - \frac{1}{xc}$

Jadi penyelesaian PD diatas adalah $\boldsymbol{y = 1 - \frac{1}{xc}}$

Integral dari :

$\int \frac{1}{1-y}dy =$

Misal :

u = 1-y→$\frac{du}{dy} = -1 \rightarrow du = -dy$

$= \int \frac{1}{u} - du$

$= -\int \frac{1}{u}du$

$= -\ln u + c$

$= \ln\left|\frac{1}{1-y}\right| + \ln c$

b. $x\frac{dy}{dx} - y = 2t^2$

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\ solusi\ PD\ y = f(x)$$

$$x\frac{dy}{dx} - y = 2t^2$$

$$x\frac{dy}{dx} = 2t^2 + y$$

$$x\frac{dy}{2t^2 + y} = dx$$

$$\frac{1}{2t^2 + y}dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{2t^2 + y}dy = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{y + 2t^2}dy = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln|y + 2t^2| + \ln C = \ln x + \ln C$$

$$\int \frac{1}{y + 2t^2}dy =$$

Misal : $u = y + 2t^2$

$$\frac{du}{dy} = 1 \to du = dy$$

Sehingga : $\int \frac{1}{y+2t^2}dy = \int \frac{1}{u}du$

$$= \ln u + C$$

$$= \ln|y + 2t^2| + C$$

$$\ln|y + 2t^2| = \ln x + \ln c$$
$$\ln|y + 2t^2| = \ln xc$$
$$e^{\ln y + 2t^2} = e^{\ln xc}$$
$$y + 2t^2 = xc$$
$$y = xc - 2t^2$$

2. Tunjukkan bahwa fungsi yang diberikan merupakan penyelesaian dari persamaan diferensial :

$a.\ \dfrac{dy}{dx} = 2y\ ,\ y = ce^{2x}$

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$
$$\frac{1}{2y}dy = dx$$
$$\int \frac{1}{2y}dy = \int dx$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{y}dy = \int dx$$
$$\frac{1}{2}\ln y = x + c$$
$$\ln y^{\frac{1}{2}} = x + c$$
$$e^{\ln y^{\frac{1}{2}}} = e^{x+c}$$
$$y^{\frac{1}{2}} = e^x . e^c$$
$$y^{\frac{1}{2}} = c . e^x$$
$$\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2 = (ce^x)^2$$
$$y = c^2 e^{2x}$$
$$y = ce^{2x}$$

Ingat teknik pengintegralan :

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$$

Sifat Logaritma

$$a \log b = \log b^a$$

$b.\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{4y}, x^2 - 4y^2 = 16, y(4) = 0$

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{4y}$$

$$4y\ dy = xdx$$

$$\int 4y\ dy = \int xdx$$

$$2y^2 + C = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2y^2 = C$$

Syarat awal $y(4) = 0$, maka $C = \frac{1}{2}(4)^2 - 2(0)^2 = 8$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2y^2 = 8$$

$$x^2 - 4y^2 = 16$$

BAB II
PERSAMAAN DIFERENSIAL SEPARABEL DAN REDUKSI KE PERSAMAAN SEPARABEL

Pada bagian ini, kita akan membahas teknik-teknik penyelesaian Persamaan Diferensial Separabel orde satu. Untuk Persamaan Diferensial Separabel orde satu yang berbentuk $y^{'} = f(x)$, dimana f fungsi kontinu dari satu peubah bebas x, maka kita dapat mengintegralkan secara langsung kedua ruas untuk memperoleh penyelesainnya. Selanjutnya akan dicari penyelesaian persamaan diferensial separabel order satu

Bentuk umum :

$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$............(1)

Dimana f fungsi kontinu dari dua peubah bebas x dan y. Penyelesainnya tidak dapat diperoleh dengan mengintegralkan secara langsung. Untuk meyelesaikan PDB orde satu ada beberapa langkah :

A. Persamaan Diferensial Separabel

Untuk mencari penyelesaian umum dari persamaan (1), terlebih dahulu kita pisahkan peubah x dan y, sehingga kita peroleh fungsi

$f(x, y) = p(x)q(y)$

Persamaan (1) berubah menjadi

$$\frac{dy}{dx} = p(x)q(y)$$

Atau dapat di tulis

$$\frac{dy}{q(y)} = p(x)dx$$

Sehingga $\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)dx$ maka akan ditemukan solusi umum PD tersebut

$y(x_0) = y_0$

Contoh 1:

Selesaikan $\frac{dy}{dx} = 2e^{-y}\cos x$

Penyelesaian :dengan memisahkan peubahnya

$$\frac{dy}{e^{-y}} = 2\cos x \;\; dx \longrightarrow a^b = \frac{1}{a^{-b}}$$

$$e^y dy = 2\cos x\, dx$$

Integralkan kedua ruas:

$$\int e^y dy = \int 2\cos x \;\; dx$$

Sehingga kita peroleh penyelesaian umumnya adalah

$$e^y + C = 2\sin x + C$$

$$e^y = 2\sin x + C$$

$$\ln e^y = \ln|2\sin x + C| \rightarrow ingat\ sifat: \log a^b = b\log a$$

$$y\ln e = \ln|2\sin x + C|$$

$$y = \ln|2\sin x + c|$$

Contoh :

Selesaikan soal berikut dengan pemisah peubah.

a. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{e^{x+y}}$

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{e^x . e^y}$$
$$\frac{dy}{dx} = x . \frac{e^{-x}}{e^y}$$
$$e^y dy = xe^{-x} dx$$
$$\int e^y \, dy = \int xe^{-x} dx$$
$$e^y + C = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$
$$e^y = -(xe^{-x} + e^{-x}) + C$$
$$y + C = \ln|-(xe^{-x} + e^{-x})| + \ln C$$
$$y = \ln|-c(xe^{-x} + e^{-x})|$$

b. $ycos^2 x \, dy + \sin x \, dx = 0$

Jawab :

$$y \cos^2 x \, dy = -\sin x \, dx$$
$$y \, dy = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$
$$\int y \; dy = \int -\frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$
$$\frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{\cos x} + C$$
$$y^2 = -\frac{2}{\cos x} + C$$
$$y + 2 \sec x = C$$

$$\int -\frac{\sin x}{\cos^2 x} dx =$$

Misalkan :

$$u = cos\, x$$
$$\frac{du}{dx} = -sin\, x$$
$$du = -sin\, x \, dx$$

Sehingga :

$$\int -\frac{sin\, x}{cos^2 x} dx = \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C$$
$$= -\frac{1}{cos\, x} + C$$

c. $\frac{dy}{dx} = xye^{x^2}$

Jawab:

Langkah 1. Memisahkan variabelnya

$$\frac{dy}{dx} = xye^{x^2}$$

$$\frac{dy}{y} = xe^{x^2}dx$$

Langkah 2. Kedua ruas diintegralkan

$$\int \frac{1}{y}dy = \int xe^{x^2}dx$$

$$\ln y = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$$e^{\ln y} = e^{\frac{1}{2}e^{x^2}+C}$$

$$y = Ce^{\frac{1}{2}e^{x^2}}$$

Sehingga solusi PD diatas adalah

$$y = Ce^{\frac{1}{2}e^{x^2}}$$

Ingat :

$$\int x\, e^{x^2}dx =$$

Misalkan :

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$du = 2xdx$

$\frac{1}{2}du = x\, dx$

Sehingga

$$\int x\, e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^u\, du = \frac{1}{2}e^u + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

d. $e^x dy + (y^3 + y^2)dx = 0$

e. $x^2 dy + y(x-1)dx = 0$

B. Persamaan Diferensial Separabel

Definisi. Persamaan diferensial dengan bentuk:

$$F(x)G(y)dx + f(x)g(y)dy = 0 \quad \text{...persamaan (4.1)}$$

disebut persamaan separabel.

Secara umum persamaan diferensial separabel tidak eksak, tetapi mempunyai faktor integrasi yang jelas yaitu:

$$\mu(x) = \frac{1}{f(x)G(y)}$$

sehingga persamaan (4.1) menjadi

$$\frac{1}{f(x)G(y)}F(x)G(y)dx + \frac{1}{f(x)G(y)}f(x)g(y)dy$$

$$\frac{F(x)}{f(x)}dx + \frac{g(y)}{G(y)}dy = 0 \text{..................................}(4.2)$$

Persamaan (4.2) merupakan persamaan diferensial eksak karena

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F(x)}{f(x)}\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g(y)}{G(y)}\right)$$

Persamaan (4.2) terlihat bahwa variabel-variabel x dan y dapat dipisahkan sehingga mengelompok. Oleh karena itu penyelesaian persamaan diferensial (4.1) adalah

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}dx + \int \frac{g(y)}{G(y)}dy = C \text{.......................................}(4.3)$$

Contoh :

Selesaikan persamaan diferensial

$$(x-4)y^2dx - x^3(y^2-3)dy = 0$$

$$F(x) = x-4, G(y) = y^2, f(x) = -x^3, g(y) = y^2 - 3$$

$$\mu(x) = \frac{1}{f(x)G(y)} = \frac{1}{-x^3y^2}$$

Penyelesaian :

Persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial separabel dengan mengkalikan $\frac{1}{-x^3y^2}$ diperoleh

$$\frac{1}{-x^3y^2}(x-4)y^2dx - \frac{1}{-x^3y^2}x^3(y^2-3)dy = 0$$

$$-\frac{x-4}{x^3}dx + \frac{y^2-3}{y^2}dy = 0$$
$$-(x-4).\,x^{-3}dx + (y^2-3).\,y^{-2}dy = 0$$
$$(-x^{-2}+4x^{-3})dx + (1-3y^{-2})dy = 0$$
$$\int(-x^{-2}+4x^{-3})dx + \int(1-3y^{-2})dy$$
$$\int -x^{-2}dx + \int 4x^{-3}\,dx + \int(1-3y^{-2})dy$$

Ingat definisi integral :

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$
$$\int -x^{-2}dx = -\int x^{-2}\,dx$$
$$= -\left(\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}\right)$$
$$= -(-1.\,x^{-1})$$
$$= x^{-1}$$
$$= \frac{1}{x}$$

Dengan mengintegralkan diperoleh penyelesaian umum

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + y + \frac{3}{y} = c$$

Latihan.

Selesaikan persamaan

$$x\,siny\,dx + (x^2+1)cosy\,dy = 0$$

dengan syarat awal $y(1) = \frac{\pi}{2}$

Penyelesaian :

Persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial separabel karena dengan membagi $(x^2+1)\sin y$ (FAKTOR INTEGRASI) diperoleh

$$\frac{x}{x^2+1}dx + \frac{cosy}{siny}dy = 0$$

Dengan mengintegralkan diperoleh

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|\sin y| = \ln|c|$$

$$\ln(x^2+1) + 2\ln|\sin y| = 2\ln|c|$$

$$\ln(x^2+1)\sin^2 y = \ln c^2$$

$$(x^2+1)\sin^2 y = C^2$$

Sehingga solusi umum persamaan diferensialnya adalah

$$(x^2+1)\sin^2 y = C$$

Dengan memberikan $x = 1$ dan $y = \frac{\pi}{2}$ diperoleh C= 2.

Jadi penyelesaian masalah syarat awalnya

$$(x^2+1)\sin^2 y = 2$$

Contoh Soal dan Pembahasan

a. Selesaikan masalah syarat awal $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$, $y(0) = -1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$$

$$2(y-1)dy = 3x^2+4x+2dx$$

$$\int 2(y-1)dy = \int 3x^2+4x+2dx$$

$$y^2-2y = x^3+2x^2+2x+C$$

Syarat awal $y(0) = -1$

$$-1^2+2 = C$$

$$C = 3$$

Sehingga solusi umum PD berubah menjadi :

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

b. Selesaikan masalah syarat awal $\frac{dy}{dx} = 2y^2 + xy^2$, $y(0) = 1$

$$\frac{dy}{dx} = y^2(2 + x)$$

$$\frac{1}{y^2}\,dy = (2 + x)dx$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int (2 + x)dx$$

$$\int y^{-2}\,dy = \int (2 + x)\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = 2x + \frac{1}{2}x^2 + c$$

Syarat awal $y(0) = 1$ maka $C = -1$

Sehingga PD berubah menjadi

$$-\frac{1}{y} = 2x + \frac{1}{2}x^2 - 1$$

c. Tunjukkan bahwa persamaan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2}$$

Adalah PD Separabel!

Jawab :

$$(1 - y^2)dy = x^2 dx$$

$$(1 - y^2)dy - x^2 dx = 0$$

$$F(x) = -x^2, g(y) = (1 - y^2), G(y) = 1, f(x) = 1$$

$$M(x, y) = -x^2, M_y = 0 \text{dan} N(x, y) = 1 - y^2, N_x = 0$$

d. Selesaikan soal PD

$y' = xy^3(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = y^3 x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\frac{1}{y^3}\,dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$
$$\int \frac{1}{y^3}\,dy = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$
$$\int y^{-3}\,dy = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

(diteruskan sebagai latihan)

Masalah Syarat Awal dan Eksistensi Solusi Persamaan Diferensial Orde Satu

Definisi 2.1. Misal Persamaan diferensial orde satu dengan bentuk derivatif

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (2.1)$$

dengan f kontinu pada domain $D \; C \; \mathcal{R}^2$ dan $(x_0, y_0) \in D$. Masalah mencari penyelesaian ϕ yang terdefinisi pada interval I yang memuat $x_0$dari persamaan (2.1) dan memenuhi syarat awal

$$\phi(x_0) = y_0$$

disebut masalah syarat awal dan ditulis sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

Contoh 1:

Selesaikan masalah syarat awal PD biasa berikut ini:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$
$$y(3) = 4$$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$
$$y\,dy = -x\,dx$$
$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$
$$\frac{1}{2}y^2 + C = -\frac{1}{2}x^2 + C$$
$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = C$$
$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = C$$
$$x^2 + y^2 = 2C$$
$$x^2 + y^2 = C$$

Persamaan diferensial tersebut mempunyai solusi umum $x^2 + y^2 = c\ldots$....(1)

Dengan memberikat syarat $y(3) = 4$disubstitusikan pada penyelesaian umum, maka diperoleh $9 + 16 = c^2$ atau c^2= 25. Jadi diperoleh penyelesaian masalah syarat awalnya

$$x^2 + y^2 = 25$$

Teorema 2.1. *Jika persamaan diferensial*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (2.2)$$

memenuhi :

Fungsi f kontinu pada domain $D\ C\ \mathcal{R}^2$

Derivatif partial $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *kontinu pada domain D.*

dan $(x_0, y_0) \in D$*, maka terdapat penyelesaian tunggal* ϕ *dari persamaan (2.2) yang terdefinisi pada suatu interval* $[x_0 - h, x_0 + h\,]$ *dimana h cukup kecil dan memenuhi syarat* $\phi(x_0) = y_0$.

Contoh 2:

Pandang masalah syarat awal

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$
$$y(1) = 3$$

Dari masalah ini diperoleh $f(x, y) = x^2 + y^2$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$ kontinu pada domain $D_y \subset R^2$. Karena syarat awal $y(1) = 3$ berarti titik (1,3) pasti termuat pada domain D tadi. Dengan teorema 2.1 diperoleh suatu penyelesaian tunggal ϕ dari persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ yang terdefinisi pada interval [1-h, 1+h] dan memenuhi ϕ $(1) = 3$

Contoh 3:

$$\frac{dy}{dx} = 2(xy + y), y(0) = 1$$

Jawab :

Langkah 1. Kita pisahkan variable-variabelnya

$$\frac{dy}{dx} = 2y(x + 1)$$
$$\frac{dy}{2y} = (x + 1)dx$$

Langkah 2. Bersama-sama diintegralkan

$$\int \frac{1}{2y} dy = \int (x+1)\, dx$$

$$\frac{1}{2}\ln y = \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$\ln y = 2\left(\frac{1}{2}x^2 + x + C\right)$$

$$\ln y = x^2 + 2x + C$$

$$e^{\ln y} = e^{x^2+2x+C}$$

$$y = e^{x^2+2x}.e^{C}$$

Karena syarat awal $y(0) = 1$, maka

$$1 = e^{0^2+2.0}.C$$

$$C = 1$$

Jadi solusi umum PD diatas dengan masalah syarat awalnya:

$$y = e^{x^2+2x}$$

Contoh 4:

$ye^{-x}dy + xdx = 0, y(1) = 2$

Jawab :

$$ye^{-x}dy + xdx = 0$$

$$ye^{-x}dy = -xdx$$

$$ydy = -\frac{x}{e^{-x}}dx$$

$$y\, dy = -xe^{x}\, dx$$

$$\int y\, dy = \int -xe^{x}\, dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\int x\, e^{x} dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -xe^{x} + e^{x} + C$$

$$y^2 = 2(-xe^x + e^x) + C$$
$$y^2 = -2xe^x + 2e^x + C$$

Karena syarat awal :$y(1) = 2$

Maka :

$$(2)^2 = -2.1.e^1 + 2.e^1 + C$$
$$4 = -2e + 2e + C$$
$$C = 4$$

Jadi solusi umum PD Biasa orde satu dengan masalah syarat awal :

$$y^2 + 2xe^x - 2e^x = 4$$
$$y^2 + 2e^x(x-1) = 4$$
$$\int \frac{e^x}{x} dx = \int \frac{1}{x} e^x dx$$
$$= \int e^x \left(\frac{1}{x}\right) dx = \int e^x \, d(\ln x)$$

Contoh 5:

Selesaikan PDB orde satu dengan masalah syarat awal berikut ini:

$$\frac{y^2 dy}{dx} = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}, y(0) = 1$$

Penyelesaian :

$$y^2 dy = \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx$$
$$\int y^2 dy = \int \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx$$

Bentuk penyelesaian integral :

$$\int \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx = \int e^x \, dx + \int \frac{1}{e^x} dx$$
$$= e^x + (-e^{-x}) + e^c$$

$$\frac{1}{3}y^3 = e^x + (-e^{-x}) + e^c$$

Dengan syarat awal $y(0) = 1$ *maka*

$$\frac{1}{3}(1)^3 = e^0 - e^0 + e^c$$

$$\frac{1}{3} = e^c$$

$$c = \ln\frac{1}{3}$$

Sehingga solusi umum PD dengan syarat awal adalah :

$$\frac{1}{3}y^3 = e^x + (-e^{-x}) + \ln\frac{1}{3}$$

LATIHAN

1. Selesaikan PDB dengan masalah MNA berikut

a. $\frac{dy}{dx} + xy - x = 0, y(1) = 2$

b. $y^{'} + y\sin x = 0, y(\pi) = 1$

c. $xdx + ye^{-x}dy = 0, y(0) = 1$

d. $\frac{dP}{dt} + P = Pte^t$

e. $\sin 2x \ dx + \cos 3y \ dy = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

f. $y^{'} = \frac{e^{-x}-e^x}{3+4y}, y(0) = 1$

2. Solve the initial value problem

$$y^{'} = \frac{2-e^x}{3+2y}, y(0) = 0$$

And determine where the solution attains its maximum value.

BAB III
PERSAMAAN DIFERENSIAL EKSAK DAN FAKTOR INTEGRASI

A. Persamaan Diferensial Eksak

Definisi : Misalkan F fungsi dua variabel yang mempunyai derivatif partial orde satu kontinu pada Domain D. Diferensial total dF dari fungsi F di definisikan:

$$\boldsymbol{dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy}$$

Untuk setiap $(x, y) \in D$

Contoh :

Misal F fungsi dua variabel dengan rumus :

$$F(x,y) = xy^3 + \sin(x + y^2)$$

Maka mempunyai diferensial total :

$$dF(x,y) = (y^3 + \cos(x + y^2))dx + (3xy^2 + 2y\cos(x + y^2)dy$$

Bentuk persamaan diferensial eksak :

$$\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy}$$

Disebut diferensial eksak pada domain D jika terdapat fungsi dua variabel F sehingga diferensial diatas merupakan diferensial total F untuk setiap $(x, y) \in D$. Dengan kata lain terdapat fungsi F sehingga $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x, y)$dan $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x, y)$.

Jika $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ merupakan diferensial eksak maka persamaan diferensial orde satu $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ disebut **persamaan diferensial eksak.**

Teorema 3.1. misalkan persamaan diferensial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ **(persamaan 2.3)**. Jika $M(x, y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$danN$(x, y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ mempunyai derivatif parsial orde satu kontinu pada D. Persamaan diferensial (2.3) eksak pada D jika dan hanya jika

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Bukti:

Jika persamaan diferensial (**2.3**) adalah eksak, maka terdapat suatu fungsi diferensial $f(x, y)$sehingga $d[f(x, y)] = 0$. Dipunyai

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x, y)$dan $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x, y)$.

Sebagai suatu syarat keeksakan. (sebagai latihan mahasiswa)

Contoh 1:

Persamaan Diferensial

$(y^3 + \cos(x + y^2))dx + (3xy^2 + 2ycos(x + y^2)dy = 0$ (1.1)

Merupakan persamaan diferensial eksak karena diperoleh

$$M(x, y) = (y^3 + \cos(x + y^2))$$
$$N(x, y) = (3xy^2 + 2ycos(x + y^2)$$

Sehingga

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 3y^2 - 2y \sin{(x + y^2)}$$
$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 3y^2 - 2y \sin{(x + y^2)}$$

Karena

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3y^2 - 2y \sin(x + y^2) = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ maka Persamaan diferensial (1.1) memenuhi persamaan diferensial eksak.

Teorema 3.2. Misalkan persamaan diferensial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ eksak pada D fungsi dua variabel F memenuhi : $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x, y)$dan $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x, y)$ untuk setiap $(x, y) \in D$, maka penyelesaian umum persamaan diferensial eksak tersebut adalah $F(x, y) = C$ dan C konstanta sembarang.

$$F(x, y) = \int M(x, y)\, dx = f(x, y) + h(y)$$

Adapun langkah-langkah untuk menyelesaikan PD Eksak adalah sebagai berikut:

Langkah 1 : Tuliskan PD dalam bentuk diferensial :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Langkah 2 : Tes ke-eksakan PD ; apakah

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Langkah 3 : jika eksak, integralkan $M(x,y)$ terhadap x atau $N(x,y)$terhadap y. Misal dipilih $M(x,y)$, maka :

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + h(y)$$

Langkah 4 : Turunkan $F(x,y)$ terhadap y dan samakan hasilnya dengan $N(x,y)$

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M\,(x,y)dx\right) + h^{'}(y).$$

Langkah 5 : integralkan $h^{'}(y)$ untuk memperoleh $h(y)$.

Langkah 6 : tuliskan penyelesaian umum dalam bentuk implisit :

$$F(x,y) = C$$

Langkah 7 : tentukan nilai C jika diberikan masalah syarat awal

Contoh 2:

Selesaikan PD

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-2y}{y^2-2x}, y(0) = 3$$

Penyelesaian :

Langkah 1. Bentuk diferensial PD adalah

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-2y}{y^2-2x}$$

$$(y^2-2x)dy = -(x-2y)dx$$

$$(x-2y)dx + (y^2-2x)dy = 0$$

Langkah 2. PD ini eksak, karena

$$M(x,y) = x - 2y \rightarrow \frac{\partial \mathrm{M(x,y)}}{\partial \mathrm{y}} = -2$$

$$N(x,y) = y^2 - 2x \rightarrow \frac{\partial \mathrm{N(x,y)}}{\partial \mathrm{x}} = -2$$

$$\frac{\partial \mathrm{M(x,y)}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial \mathrm{N(x,y)}}{\partial \mathrm{x}} = -2$$

Langkah 3. Misal kan dipilih $\mathrm{M(x,y)}$untuk diintegralkan, maka:

$$\mathrm{F(x,y)} = \int \mathrm{M(x,y)\,dx + h(y)}$$

$$= \int \mathrm{(x - 2y)\,dx + h(y)}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{x}^2 - \mathrm{2xy + h(y)}.$$

$$y = x^n \rightarrow \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

Langkah 4. Samakan $\frac{\partial \mathrm{F(x,y)}}{\partial \mathrm{y}}$ dengan $\mathrm{N(x,y)}$

$$\frac{\partial \mathrm{F(x,y)}}{\partial \mathrm{y}} = N(x,y)$$

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{2}x^2 - 2xy + h(y)\right)}{\partial y} = y^2 - 2x$$

$$-2x + h^{'}(y) = (y^2 - 2x)$$

$$h^{'}(y) = y^2 - 2x + 2x = y^2$$

Langkah 5: integralkan $h^{'}(y)$ untuk memperoleh $h(y)$

$$\int h^{'}(y)\,dy = \int y^2\,dy$$

$$\int \frac{d\big(h(y)\big)}{dy}.\,dy = \int y^2\,dy$$

$$\int d\big(h(y)\big) = \int y^2\,dy$$

$$h(y) = \frac{1}{3}y^3 + C$$

Langkah 6: tuliskan penyelesaian umum dalam bentuk implisit :

$$F(x,y) = C$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{xy} + \frac{1}{3}y^3 = C$$

Langkah 7: tentukan nilai C jika diberikan masalah syarat awal $y(0) = 3$, maka

$$C = 9$$

Maka solusi umum PD eksak dengan masalah syarat awal :

$\frac{1}{2}\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{xy} + \frac{1}{3}y^3 = 9$atau$\frac{1}{2}\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{xy} + \frac{1}{3}y^3 - 9 = 0$

Contoh3 :

Diberikan suatu persamaan diferensial

$$ydx + 2xdy = 0$$

Apakah merupakan persamaan diferensial eksak? Jika ya, maka selesaikan persamaan diferensial tersebut

Jawab :

$$M(x,y) = y \rightarrow \frac{\partial \mathrm{M(x,y)}}{\partial \mathrm{y}} = 1$$

$$N(x,y) = 2x \rightarrow \frac{\partial \mathrm{N(x,y)}}{\partial \mathrm{x}} = 2$$

Karena

$$\frac{\partial \mathrm{M(x,y)}}{\partial \mathrm{y}} \neq \frac{\partial \mathrm{N(x,y)}}{\partial \mathrm{x}}$$

Maka bukan PD eksak. PD diatas merupakan PD separabel, maka penyelesaiaanya :

$$ydx + 2xdy = 0$$
$$ydx = -2xdy$$
$$-\frac{1}{2x}dx = \frac{1}{y}dy$$

Integralkan kedua ruas

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{y}dy$$
$$-\frac{1}{2}\ln x = \ln y + C$$
$$\ln x^{-\frac{1}{2}} = \ln y + C$$

Sifat logaritma $e^{\log x} = e^{\ln x} = x,$ sehingga kedua ruas dipangkatkan dalam bentuk eksponential

$$e^{\ln x^{-\frac{1}{2}}} = e^{\ln y + C}$$
$$x^{-\frac{1}{2}} = y + C$$

Solusi eksplisit dari Persamaan Diferensial diatas adalah

$$y = x^{-\left(\frac{1}{2}\right)} + C$$
$$y = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + C$$
$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} + C$$

LATIHAN

1. Selesaikan persamaan diferensial
$$(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0$$
2. Selesaikan masalah syarat awal :
$(2xcos\, y + 3x^2y)dx + (x^3 - x^2 \sin y - y)dy = 0$
dengan y(0) = 2
3. Selesaikan PD $(3x^2y^2 - x)dy + (2xy^3 - y)dx = 0$
4. Tentukan masalah syarat awal berikut:
$(y^3 + \cos(x + y^2))dx + (3xy^2 + 2ycos(x + y^2)dy,$ y(0) = 1
5. Pilihlah dari persamaan-persamaan berikut yang eksak dan selesaikan :
a. $(x^2 - y)dx - xdy = 0$
b. $y(x - 2y)dx - x^2dy = 0$
c. $dx - (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}dy = 0$
d. $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$
e. $\left(4x^3y^3 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(3x^4y^2 - \frac{1}{y}\right)dy = 0$

B. Persamaan Diferensial Non Eksak

Dalam persamaan diferensial bentuk

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ....(1)

yang memenuhi persamaan diferensial eksak. Apabila syarat awal persamaan diferensial eksak tidak terpenuhi, dimana

$$\boldsymbol{M(x, y)dy \neq N(x, y)dx}$$

Maka perlu adanya faktor tambahan yang biasa di sebut dengan faktor integrasi

$\boldsymbol{\mu(x)} = \boldsymbol{e^{\int P(x)dx}}$, **dimana** $\boldsymbol{P(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{M(x,y)}}\left(\frac{\boldsymbol{\partial N(x,y)}}{\boldsymbol{\partial x}} - \frac{\boldsymbol{\partial M(x,y)}}{\boldsymbol{\partial y}}\right)$

atau$\boldsymbol{P(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N(x,y)}}\left(\frac{\boldsymbol{\partial M(x,y)}}{\boldsymbol{\partial y}} - \frac{\boldsymbol{\partial N(x,y)}}{\boldsymbol{\partial x}}\right)$**atau** $\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\boldsymbol{.}\,\mu$

Sehingga bentuk persamaan (1) akan berubah menjadi:

$$\boldsymbol{\mu(x)}M(x,y)dx + \boldsymbol{\mu(x)}N(x,y)dy = 0$$

Untuk langkah mencari solusi umumnya sama dengan PD eksak.

Contoh 1 :

Selesaikan persamaan diferensial berikut

$ydx + 2xdy = 0$.........(1)

Jawab:

Jika dilihat dari bentuk persamaan diferensial tersebut mengarah ke persamaan diferensial eksak bentuk:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Tetapi untuk menguji persamaan diatas eksak atau bukan harus memenuhi syarat awal

$$ydx + 2xdy = 0$$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1$ dan $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ =2 karena $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

maka perlu adanya faktor integrasi $\boldsymbol{\mu(x)} = \boldsymbol{e^{\int P(x)dx}}$dimana

$P(x) = \frac{1}{2x}(1-2) = -\frac{1}{2x}$ sehingga $\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{2x}dx} = e^{\ln x^{-\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$ sehingga persamaan (1) di ubah menjadi:

$$x^{-\frac{1}{2}}ydx + x^{-\frac{1}{2}}2xdy = 0$$

Setelah menemukan faktor integrasi lakukan uji ulang untuk membuktikan eksak atau bukan. (**bukti sebagai latihan mahasiswa**)

Contoh 2

Selesaikan persamaan diferensial

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$$

Apakah merupakan Persamaan Diferensial Eksak?

a. Jika ya tentukan solusi umumnya
b. Jika tidak carilah faktor integrasinya.
c. Tentukan solusi umum dari PD di atas.

Jawab :

a. $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ $atau\ M_y = 3x + 2y$ dan $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ $atau\ N_x = 2x + y$ karena $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

maka perlu adanya faktor integrasi $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

b. Factor integrasi :

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}.\mu$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{3x + 2y - 2x - y}{x^2 + xy}.\mu$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{x + y}{x(x + y)}.\mu$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{x}.\mu$$
$$\frac{1}{\mu}d\mu = \frac{1}{x}dx$$
$$\ln\mu = \ln x$$
$$e^{\ln\mu} = e^{\ln x}$$
$$\mu(x) = x$$

c. Faktor integrasi $\mu(x)$ dikalikan ke bentuk persamaan diferensial awal :

$$x(3xy + y^2)dx + x(x^2 + xy)dy = 0$$
$$(3x^2y + xy^2)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0$$

Kita uji ke eksakkannya :

$$M(x,y) = 3x^2y + xy^2 \rightarrow M_y = 3x^2 + 2xy$$
$$N(x,y) = x^3 + x^2y \rightarrow N_x = 3x^2 + 2xy$$

Sehingga diperoleh $M_y = N_x$

Solusi umum :

$$\mathrm{F(x,y) = C}$$
$$\mathrm{F(x,y)} = \int \mathrm{M(x,y)\,dx + h(y)}$$

Diperoleh

$$F(x,y) = \int (3x^2y + xy^2)dx + h(y)$$
$$F(x,y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + h(y)$$

Turunkan $\frac{dF(x,y)}{dy} = N(x,y)$

$$x^3 + x^2y + \frac{dh(y)}{dy} = x^3 + x^2y$$
$$\frac{dh(y)}{dy} = 0$$
$$dh(y) = 0.dy$$

$$\int dh(y) = C$$
$$h(y) = C$$

maka solusi umum PD

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + C = C$$
$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C$$

LATIHAN SOAL

1. Kerjakan nomor 10
$$(\frac{y}{x} + 6x)dx + (\ln x - 2)dy = 0 \text{ untuk } x > 0$$
2. Nomor 19
$$x^3y^3dx + x(1 + y^2)dy = 0 \text{ dimana } \mu(x) = \frac{1}{xy^3}$$
3. Tentukan $N(x, y)$ sehingga $(xy - y^2 + x)dx + N(x, y)dy = 0$ eksak.
4. Tunjukkan bahwa PD $2xy\,dy + (3x + 2y^2)dx = 0$ adalah non eksak. Kemudian tentukan faktor integrasinya sehingga PD tersebut menjadi eksak dan selesaikan.
5. Selesaikan PD
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos y}{x \sin y - y^2}$$
pada buku Elementary Differential Equations& boundary value Problemshal 100.

BAB IV
PERSAMAAN DIFERENSIAL HOMOGEN ORDE PERTAMA

A. Persamaan Diferensial Homogen

Definisi. Persamaan diferensial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ disebut homogen jika dapat ditulis dalam bentuk derivatif $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, maka terdapat fungsi g sehingga $f(x,y) = g(\frac{y}{x})$.

Contoh 1.

Persamaan diferensial $(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$homogen, karena apabila ditulis dalam bentuk derivatif

$$(x^2 - 3y^2)dx = -2xy\,dy$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 - 3y^2}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$

$$= \frac{3y^2}{2xy} - \frac{x^2}{2xy}$$

$$= \frac{3y}{2x} - \frac{x}{2y}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{y}{x}}\right).$$

Yang ruas kanan berbentuk fungsi $g(\frac{y}{x})$.

Contoh 2.

Persamaan diferensial $\left(y+(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right)dx - xdy = 0$ homogen, karena apabila ditulis dalam bentuk derivatif

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\left(y+\sqrt{y^2+x^2}\right)}{x}\\ &= \frac{y}{x} \pm \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2}}\\ &= \frac{y}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{x^2}{x^2}\right)+\left(\frac{y^2}{x^2}\right)}\\ &= \frac{y}{x} \pm \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\end{aligned}$$

Yang ruas kanan berbentuk fungsi $g\left(\frac{y}{x}\right)$.

Teorema. Jika persamaan diferensial

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.......................................*(5.1)*

Homogen, maka dengan memisalkan y=vx persamaan diferensial (5.1) berubah menjadi persamaan diferensial separabel.

Langkah –langkah menentukan penyelesaian umum PD :

Langkah 1. Gunakan transformasi : $y = vx, dy = v + x\frac{dv}{dx}$ atau $x = vy, dx = vdy + y\,dv$.

Langkah 2. PD Homogen tereduksi ke PD variabel-variabel terpisah.

Langkah 3. Gunakan aturan dalam PD variabel-variabel terpisah untuk mendapatkan solusi umum PD

Langkah 4. Gantilah $v = \frac{y}{x}$ (jika menggunakan transformasi $y = vx$) dan $v = \frac{x}{y}$ (jika menggunakan transformasi $x = vy$) untuk mendapatkan kembali variabel semula.

Contoh 3.

Selesaikan persamaan diferensial

$(x^2 - 3y^2)\, dx + 2xydy$=0

Penyelesaian

Telah ditunjukkan bahwa persamaan diferensial tersebut homogen dan dapat ditulis dalam bentuk derivatif

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{y}{x}}\right)$$

Misalkan $y = vx$, di peroleh $\frac{y}{x} = v$ dan $\frac{dy}{dx} = v + x\left(\frac{dv}{dx}\right)$ sehingga

$$v + x\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{3}{2}v - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v}\right)$$

$$x\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{3}{2}v - v - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v}\right)$$

$$x\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v}\right)$$

$$x\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{v^2 - 1}{2v}$$

$$\frac{2vdv}{v^2 - 1} = \frac{dx}{x}$$

Merupakan persamaan diferensial variabel-variabel terpisah dan diintegralkan diperoleh

$$\int \frac{2v}{v^2 - 1} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|v^2 - 1| = \ln x + \ln c$$

$$\ln|v^2 - 1| = \ln cx$$
$$e^{\ln|v^2-1|} = e^{\ln cx}$$
$$v^2 - 1 = cx$$

Di kembalikan ke variabel semula diperoleh

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 = cx$$

Jika $y \geq x \geq 0$ dapat ditulis menjadi

$$\frac{y^2}{x^2} - 1 = cx$$
$$\frac{(y^2 - x^2)}{x^2} = cx$$
$$y^2 - x^2 = cx^3$$

Contoh4 :

Selesaikan persamaan diferensial $\left(y + \sqrt{(x^2 + y^2)}\right)dx - xdy = 0$

Dengan syarat awal $y(1) = 0$

Penyelesaian :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{(x^2 + y^2)}}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Misalkan $y = vx$, sehingga diperoleh

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1 + v^2}$$
$$x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}$$

$$\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{dx}{x}$$

Merupakan persamaan diferensial separabel dan diintegralkan diperoleh

$$\ln\left|v+\sqrt{1+v^2}\right| = \ln x + \ln c$$

$$v+\sqrt{1+v^2} = cx$$

Dikembalikan ke variabel semula diperoleh

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} = cx$$

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = cx^2$$

Jika syarat awal $y = 0$ untuk $x = 1$, maka diperoleh $c = 1$. Jadi penyelesaian masalah syarat awal adalah

$$y = \frac{1}{2}(x^2-1)$$

Latihan

Selesaikan PD homogen berikut :

1. $2x\frac{dy}{dx} = -(x^2+y^2)$
2. $\frac{x(y-x)dy}{dx} = x^2+y^2$
3. $\frac{xdy}{dx} - y = xe^{\frac{y}{x}}$
4. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = cos\left(\frac{y-x}{x}\right), x > 0$

5. $x\frac{dy}{dx} = y\ln y - y\ln x$
6. $2x\,dy - 2y\,dx = \left(\sqrt{x^2 + 4y^2}\right)dx$
7. $(y^2 - x^2)dx + xydy = 0$
8. $\left(1 + 2e^{\frac{x}{y}}\right)dx + 2e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$

B. Persamaan Diferensial Non Homogen Bentuk Khusus

Bagian ini membahas PD non homogen bentuk

$\boldsymbol{(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0}$

Teorema 6. Misal persamaan diferensial

$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$ ....(6.1)

Dengan $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ konstanta di R

1. *Jika* $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1} \neq \frac{c_2}{c_1}$ *atau* $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1}$

Langkah-langkah mendapatkan penyelesaian umum PD :

a. **Cara Pertama dengan mengubah variabel**

Langkah 1. Gunakan transformasi

$$x = u + h$$
$$y = v + k$$

Langkah 2. Mencari nilai h dan k. Dimana (h,k)merupakan penyelesaian dari sistem*:*

$$a_1h + b_1k + c_1 = 0$$
$$a_2h + b_2k + c_2 = 0$$

Langkah 3. Persamaan (6.1) menjadi persamaan homogen dalam variabel u dan v sebagai berikut:

$$(a_1u + b_1v)du + (a_2u + b_2v)dv = 0$$

b. **Cara Kedua dengan substitusi**

Langkah 1. Gunakan transformasi :

$$u = a_1x + b_1y + c_1 \Longrightarrow a_1\,dx + b_1\,dy = du$$
$$v = a_2x + b_2y + c_2 \Longrightarrow a_2\,dx + b_2\,dy = dv$$

Diperoleh :

$$dx = \left|\frac{\begin{matrix} du & b_1 \\ dv & b_2 \end{matrix}}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}}\right| = \frac{b_2du - b_1dv}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$dy = \left|\frac{\begin{matrix} a_1 & du \\ a_2 & dv \end{matrix}}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}}\right| = \frac{a_1dv - a_2du}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Langkah 2. Bentuk PD menjadi :

$$u\left(\frac{b_2du - b_1dv}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + v\left(\frac{a_1dv - a_2du}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) = 0$$

Karena $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ maka :

$$(b_2u - a_2v)du + (a_1v - b_1u)dv = 0$$

Merupakan PD Homogen

Langkah 3. Selesaikan PD Homogen tersebut sesuai dengan langkah-langkah yang tertera pada bab PD Homogen.

Langkah 4. Gantilah u dan v dengan transformasi semula.

2. *Jika* $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \neq \frac{c_2}{c_1} = k,$

   PD (6.1) menjadi

   $(ka_1x + kb_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

   $(k(a_1x + b_1y) + c)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

   maka dengan transformazi $z = a_1x + b_1y$

   Langkah-langkah mendapatkan penyelesaian PD:

   Langkah 1. Gunakan transformasi : $z = a_1x + b_1y, dy = \frac{dz - a_1dx}{b_1}$ atau $dx = \frac{dz - b_1dy}{a_1}$

   Langkah 2. Misalkan $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \mu$ maka $ax + by = \mu z$

   Langkah 3. Bentuk PD menjadi $(\mu z + c_1)dx + (z + c_2)\left(\frac{dz - a_1dx}{b_1}\right) = 0$ atau $(\mu z + c_1)(\frac{du - b_1dy}{a_1}) + (z + c_2)dy = 0$

   Langkah 4. Tereduksi menjadi PD variabel-variabel terpisah

   Langkah 5. Gantilah $z = a_1x + b_1y$ untuk mendapatkan kembali variabel semula dalam penyelesaian umum.

3. *Jika* $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = k,$ *maka persamaan (6.1) merupakan persamaan diferensial*

   $(ka_2x + kb_2y + kc_2)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

   dengan penyelesaian $kdx + dy = C,$ *untuk sembarang konstanta C.*

Langkah-langkah mendapatkan penyelesaian umum PD.

Langkah 1. Karena $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} =$ maka gunakan transformasi $a_2x + b_2y + c_2 = u$ yang berarti bahwa $k(a_1x + b_1y + c_1) = ku$.

Langkah 2. Bentuk PD menjadi :

$$ku\,dx + k\,dy = 0$$
$$kdx + dy = 0$$

Langkah 3. Tereduksi menjadi PD variabel-variabel terpisah

Langkah 4. Penyelesaian PD :

$$k\int dx + \int dy = c$$

$kx + y = c,$ c adalah konstanta sembarang atau konstanta integrasi.

Contoh dan pembahasan

Contoh 1 : Selesaikan $(2x + 3y + 1)dx + (4x + 6y + 1)dy = 0$

Penyelesaian :

Langkah 1. Dari persamaan diferensial diatas diperoleh :

$$\frac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_1} = \frac{b_2}{b_1} = 2 \neq 1 = \frac{c_2}{c_1}$$

dengan transformasi $z = 2x + 3y$

langkah 2. misalkan $\frac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{a}_1} = \frac{b_2}{b_1} = 2 = \mu$ maka $2x + 3y = 2z$

langkah 3. Bentuk PD menjadi

$$\big((2x + 3y) + 1\big)dx + (2(2x + 3y) + 1)dy = 0$$

$$(z+1)dx + (2z+1)\left(\frac{dz-2dx}{3}\right) = 0$$
$$(z+1)dx + \frac{(2z+1)dz-(2z+1)2dx}{3} = 0$$
$$3(z+1)dx + (2z+1)\,dz - (2z+1)2dx = 0$$
$$(3z+3)dx + (2z+1)dz - (4z+2)dx = 0$$
$$(3z+3-4z-2)dx + (2z+1)dz = 0$$
$$(1-z)dx + (2z+1)dz = 0$$
$$dx + \frac{2z+1}{1-z}dz = 0$$
$$dx + \frac{-2(1-z)+3}{1-z}dz = 0$$
$$dx - \frac{2(1-z)}{1-z}dz + \frac{3}{1-z}dz = 0$$
$$\int dx - 2\int dz + 3\int \frac{1}{1-z}dz = c$$
$$x - 2z - 3\,ln|1-z| = c$$

Langkah 4. Gantilah $z = 2x + 3y$ akan diperoleh solusi umum PD tersebut

$$x - 2(2x+3y) - 3\,ln|1-2x-3y| = c$$
$$x - 4x - 6y - 3\,ln|1-2x-3y| = c$$
$$-3x - 6y - 3\,ln|1-2x-3y| = c$$
$$x + 2y + ln\,|2x+3y-1| = c$$

Contoh 2: Selesaikan persamaan diferensial

$(5x+2y+1)dx + (2x+y+1)dy = 0$..........................(6.2)

Penyelesaian

Dari persamaan diferensial (6.2) diperoleh

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{5} \neq \frac{1}{2} = \frac{b_2}{b_1}$$

Sehingga merupakan kasus 1 dari teorema 6. Penyelesaian dari sistem

$$\left.\begin{array}{ll} 5h + 2k + 1 = 0 & 5h + 2k = -1 \\ 2h + k + 1 = 0 & 2h + k = -1 \end{array}\right\}$$

Adalah

$$h = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1,\ k = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{1} = -3$$

dengan transformasi

$$x = u + 1$$
$$y = v - 3$$

persamaan (6.2) menjadi **persamaan homogen** dalam variabel u dan v sebagai berikut :

$$(5x + 2y + 1)dx + (2x + y + 1)dy = 0$$
$$(5(u + 1) + 2(v - 3) + 1)du + (2(u + 1) + (v - 3) + 1)dv = 0$$
$$(5u + 5 + 2v - 6 + 1)du + (2u + 2 + v - 3 + 1)dv = 0$$
$$(5u + 2v)du + (2u + v)dv = 0$$

Persamaan tersebut dapat di tulis dalam bentuk derivatif, sehingga menjadi

$$(5u + 2v)du + (2u + v)dv = 0$$
$$(5u + 2v)du = -(2u + v)dv$$
$$\frac{du}{dv} = -\frac{(2u + v)}{(5u + 2v)}$$
$$\frac{du}{dv} = -\frac{\frac{(2u+v)}{v}}{\frac{(5u+2v)}{v}}$$
$$\frac{du}{dv} = -\frac{2\left(\frac{u}{v}\right) + 1}{5\left(\frac{u}{v}\right) + 2}$$

Merupakan PD homogen berderajad 1. Sehingga langkah penyelesaiannya dengan transformasikan

$u = wv, \frac{u}{v} = w$

$$\frac{du}{dv} = w + v.(\frac{dw}{dv})$$

Sehingga

$$w + v.\left(\frac{dw}{dv}\right) = -\frac{2w+1}{5w+2}$$

$$\frac{v}{dv}.dw = -\frac{2w+1}{5w+2} - w$$

$$\frac{v}{dv}.dw = \frac{-2w-1-w(5w+2)}{5w+2}$$

$$\frac{v}{dv}.dw = \frac{-2w-1-5w^2-2w}{5w+2}$$

$$\frac{v}{dv}.dw = -\frac{(5w^2+4w+1)}{5w+2}$$

$$\frac{5w+2}{(5w^2+4w+1)}dw = -\frac{1}{v}dv$$

$$\int \frac{5w+2}{(5w^2+4w+1)}dw = -\int \frac{1}{v}dv$$

$$\frac{1}{2}\ln|5w^2+4w+1| + C = -\ln v$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|5\left(\frac{u}{v}\right)^2 + 4\left(\frac{u}{v}\right) + 1\right| + \ln v = C$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|5\left(\frac{x-1}{y+3}\right)^2 + 4\left(\frac{x-1}{y+3}\right) + 1\right| + \ln|y+3| = C$$

Ingat : integral dengan metode substitusi

$$\int \frac{5w+2}{(5w^2+4w+1)}dw$$

Misal :

$$k = 5w^2 + 4w + 1$$
$$\frac{dk}{dw} = 10w + 4$$
$$dk = 2(5w+2)dw$$
$$\frac{1}{2}dk = (5w+2)dw$$

Sehingga integral diatas menjadi

$$\int \frac{1}{k}.\frac{1}{2}dk = \frac{1}{2}\int \frac{1}{k}dk$$
$$= \frac{1}{2}\ln k = \frac{1}{2}\ln|5w^2 + 4w + 1| + C$$

Jadi solusi umum PD diatas adalah

$$\frac{1}{2}\ln|5\left(\frac{x-1}{y+3}\right)^2 + 4\left(\frac{x-1}{y+3}\right) + 1| + \ln|y+3| = C$$

Contoh 3. Selesaikan PD dibawah ini

$$\frac{dx}{dt} = 10y - 4x - 4$$
$$\frac{dy}{dt} = -(2x - 5y + 2)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 5y + 2}{10y - 4x - 4}$$
$$(10y - 4x - 4)dy = -(2x - 5y + 2)dx$$
$$(2x - 5y + 2)dx + (10y - 4x - 4)dy = 0$$

Penyelesaian :

Langkah 1. Dari persamaan diferensial diatas diperoleh :

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = -2$$

dengan transformasi $u = 2x - 5y + 2$ maka

$$10y - 4x - 4 = -2(2x - 5y + 2) = -2u$$

langkah 2. Bentuk PD berubah menjadi

$$udx - 2udy = 0$$
$$dx - 2dy = 0$$

Langkah 3. Penyelesaian PD

$$\int dx - 2\int dy = c$$
$$x - 2y = c$$

Jadi solusi umum PD adalah

$$x - 2y = c$$

LATIHAN

1. Selesaikan persamaan diferensial

   $(3x + 2y + 1)dx - (3x + 2y - 1)dy = 0$

   Dengan syarat awal y(-2) = 2
2. Selesaikan persamaan diferensial berikut ini :
   a. $(x - 2y + 1)dx - (2x - 4y + 2)dy$dengan syarat awal $y(0) = -1$.
   b. $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2y-4x}{1+y+2x}$
   c. $(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0$
   d. $(3y - 7x + 7)dx + (7y - 3x + 3)dy = 0$

BAB V
PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER ORDE SATU

Definisi 7.1. Persamaan diferensial linier orde satu dengan variabel tak bebas y dan variabel bebas x, dapat di tulis dalam bentuk :

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)}$$

Contoh : persamaan

$$x\frac{dy}{dx} + (x+1)y = x^3$$

Dapat ditulis menjadi

$$\frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = x^2$$

Persamaan diferensial linier orde satu dapat ditulis dalam bentuk diferensial menjadi

$$\big(P(x)y - Q(x)\big)dx + dy = 0$$

Sehingga di peroleh

$$M(x,y) = P(x)y - Q(x), N(x,y) = 1$$

Maka

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = P(x) \neq 0 = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Jadi persamaan diferensial linier orde satu bukan persamaan diferensial eksak dan karena pada persamaan terakhir memuat hanya variabel x saja, maka dapat diasumsikan mempunyai faktor integral yang hanya tergantung x saja, misalkan $\mu(x)$, maka diperoleh

$$\mu(x)\big(P(x)y - Q(x)\big)\,dx + \mu(x)dy = 0$$

Dengan mengingat definisi faktor integral diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)\big(P(x)y - Q(x)\big)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)$$

$$\boldsymbol{\mu(x)P(x) = \frac{d\mu(x)}{dx}}$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial separabel yang penyelesaiannya adalah

$$\boldsymbol{\mu(x) = e^{\int P(x)dx}}$$

Jelas $\mu > 0$, sehingga $\mu(x)$ merupakan faktor integral dari persamaan diferensial linier orde satu sehingga

$$e^{\int P(x)dx}\big(P(x)y - Q(x)\big)dx + e^{\int P(x)dx}dy = 0$$

$$e^{\int P(x)dx}P(x)ydx - e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + e^{\int P(x)dx}dy = 0$$

$$dye^{\int P(x)dx} + e^{\int P(x)dx}dy - e^{\int P(x)dx}Q(x)dx = 0$$

$$dye^{\int P(x)dx} - e^{\int P(x)dx}Q(x)dx = 0$$

$$ye^{\int P(x)dx} - \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx = 0$$

$$y\mu(x) - \int \mu(x).Q(x)\,dx = 0$$

$$y = \frac{\int \mu(x).Q(x)\,dx}{\mu(x)}$$

Dari uraian diatas dapat disimpulkan dalam suatu teorema berikut :

Teorema. Persamaan diferensial linier orde satu

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Mempunyai faktor integral

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Penyelesaian umum persamaan diferensialnya

$$\mathbf{ye^{\int P(x)dx} - \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx = 0}$$

Adapun langkah-langkah untuk menyelesaikan Persamaan Diferensial Linier Orde satu adalah sebagai berikut :

Langkah 1 : tuliskan bentuk Persamaan Diferensial linier orde satu tersebut dalam bentuk standar

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Langkah 2. Tentukan faktor integralnya.

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Langkah 3. Kalikan Q(x) dengan $\mu(x)$ dan integralkan

$$\int \mu(x)Q(x)\,dx$$

Langkah 4. Tuliskan penyelesaian umum

$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)\,dx + C$$

Atau

$$y = \frac{\int \mu(x)Q(x)\,dx + C}{\mu(x)}$$

Contoh :

1. Selesaikan PD dibawah ini

$$x\frac{dy}{dx} + (x+1)y = x^3$$

Penyelesaian :

Langkah 1 : tuliskan bentuk Persamaan Diferensial linier orde satu tersebut dalam bentuk standar dengan dibagi x

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x+1}{x}y = x^2$$

Dimana $P(x) = \frac{x+1}{x}$dan $Q(x) = x^2$

Langkah 2. Tentukan faktor integralnya.

$$\mu(x) = e^{\int \frac{x+1}{x}dx}$$

Dimana

$$\int \frac{x+1}{x}dx = x + \ln x$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{(x+\ln x)}\\ &= e^x.e^{\ln x}\\ &= e^x.x\end{aligned}$$

$$\mu(x) = xe^x$$

Langkah 3. Kalikan Q(x) dengan μ dan integralkan

$$\int \mu(x)Q(x)\,dx + C = \int xe^x . x^2 dx + C$$
$$= \int x^3\, e^x dx + C$$
$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C$$
$$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$

Langkah 4. Tuliskan penyelesaian umum

$$y = \frac{\int \mu(x)Q(x)\,dx + C}{\mu(x)}$$
$$= \frac{(e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C)}{xe^x}$$
$$= x^2 - 3x + 6 - \frac{6}{x} + C$$

2. Carilah penyelesaian umum persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = 6x^2$$

Penyelesaiannya :

Dari persamaan diferensial tersebut diperoleh

$$P(x) = \frac{3}{x}\,, Q(x) = 6x^2$$

Dan bentuk persamaan diferensialnya

$$\left(\frac{3y}{x} - 6x^2\right)dx + dy = 0$$

Sehingga dengan teorema diatas faktor integralnya

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = x^3$$

Cara I :

Kalikan $Q(x) = 6x^2$ dengan $\mu(x) = x^3$ dan integralkan, sehingga diperoleh

$$\int \mu(x)Q(x)\,dx = \int x^3(6x^2)\,dx$$

$$= \int 6x^5 dx = x^6 + C$$

Jadi penyelesaian umumnya adalah

$$y = \frac{\int \mu(x)Q(x)\,dx + C}{\mu(x)}$$

$$y = \frac{x^6 + c}{x^3}$$

$$x^3 y = x^6 + C$$

atau

$$x^3 y - x^6 = C$$

Cara II :

Diperoleh persamaan diferensial eksaknya

$$(3x^2 y - 6x^5)dx + x^3 dy = 0$$

$$3x^2 y\,dx - 6x^5\,dx + x^3\,dy = 0$$

Yang mempunyai penyelesaian umum dengan metode pengelompokkan

$$x^3 y - x^6 = C$$

LATIHAN

Selesaikan Persamaan diferensial linier orde satu berikut

a. $x\left(\frac{dy}{dx}\right) + y = e^x \quad , x > 0$

b. $\frac{dy}{dx} + (\tan x)\, y = \cos^2 x \quad , -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

c. $x^2 dy + xy\, dx = (x-1)^2 dx.$

Selesaikan Masalah Nilai Awal berikut

a. $3x\frac{dy}{dx} - y = \ln x + 1 \;\; , x > 0, y(1) = -2$

b. $\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = x^2 , \quad y(0) = -1$

c. $xdy + (y - \cos x)dx = 0 , \;\; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

BAB VI
PERSAMAAN DIFERENSIAL BERNOULLI DAN RICCATI

A. PERSAMAAN DIFERENSIAL BERNOULLI

Definisi 8.1. Persamaan diferensial yang dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Disebut persamaan diferensial bernaulli.

Teorema. 8.1. Apabila $n \neq 0{,}1$, maka dengan transformasi $v = y^{1-n}$dan $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\left(\frac{dv}{dx}\right)$ persamaan bernaulli berubah menjadi PD linier tingkat satu

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$$

Dengan penyelesaian umum berbentuk

$$ve^{(1-n)\int P(x)dx} = (1-n)\int e^{(1-n)\int P(x)dx}Q(x)dx$$

$$\boldsymbol{y^{1-n}.e^{(1-n)\int P(x)dx} = (1-n)\int e^{(1-n)\int P(x)dx}.Q(x)dx}$$

Langkah –langkah mendapatkan penyelesaian umum PD :

Langkah 1. Reduksilah PD Bernoulli itu dengan transformasi $v = y^{1-n}$ dan $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\left(\frac{dv}{dx}\right)$ menghasilkan PD linier orde satu :

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$$

Langkah 2. Gunakan langkah PD linier orde satu untuk menyelesaikannya.

Langkah 3. Gantilah v dengan transformasi semula untuk mendapatkan penyelesaian umum PD Bernoulli

Contoh1:

Selesaikan

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^3$$

Dimana $P(x) = 1$ dan $Q(x) = x; n = 3$

Penyelesaian

Dengan substitusi

$$v = y^{1-n}$$
$$= y^{1-3}$$
$$v = y^{-2}$$

Diperoleh

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$$
$$\frac{dv}{dx} + (1-3)1.v = (1-3)x$$
$$\frac{dv}{dx} - 2v = -2x$$

Sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$\boldsymbol{y^{1-n}.e^{(1-n)\int P(x)dx} = (1-n)\int e^{(1-n)\int P(x)dx}.Q(x)dx}$$
$$y^{-2}.e^{-2(x)} = -2\int e^{-2x}.x\,dx$$

Dimana

$$\int e^{-2x}.x\,dx = x.-\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Sehingga diperoleh

$$y^{-2}.e^{-2(x)} = -2\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+C$$

$$y^{-2}e^{-2x} = \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x}+C.$$

$$y^{-2} = \left(x+\frac{1}{2}\right)+C$$

Jadi penyelesaian umum PD adalah

$$y^{-2} = \left(x+\frac{1}{2}\right)+C$$

Contoh 2.

LATIHAN

a. $\frac{dy}{dx} - y = -y^2$
b. $\frac{x^2dy}{dx} + 2xy = y^3, x > 0$
c. $xydx + (x^2 - 3y)dy = 0$
d. $\frac{dy}{dx} - y = xy^2$
e. $x\frac{dy}{dx} + y + x^2y^2e^x = 0, x > 0$

B. PERSAMAAN DIFERENSIAL RICCATI

Persamaan Riccati berbentuk

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^2 + R(x)$$

Jika y_1 adalah fungsi yang memenuhi persamaan Riccati, dapat dibuktikan bahwa dengan substitusi $y = y_1 + \frac{1}{u}$akan diperoleh PD linier tingkat satu

$$\frac{du}{dx} + [2y_1(x)Q(x) - P(x)]u = -Q(x)$$

Dengan penyelesaian umum berbentuk

$$ue^{\int[2y_1(x)Q(x)-P(x)]dx} = -\int e^{2y_1(x)Q(x)-P(x)}Q(x)dx + C$$

Atau

$$\frac{1}{y-y_1}e^{\int 2y_1(x)Q(x)-P(x)dx} = -\int e^{2y_1(x)Q(x)-P(x)}Q(x)dx + C$$

Secara jelas, jika $R(x) = 0$, maka persamaan menjadi persamaan Bernoulli. Jika$R(x) \neq 0$, penyelesaian umum dicari dengan langkah-langkah sebagai berikut :

Langkah 1. Jika satu penyelesaian khusus yang sudah diketahui, misal $y_1 = u(x)$, dankarena itu dipunyai

$$\frac{du}{dx} = P(x)u^2 + Q(x)u + R(x)$$

Langkah 2. Disubstitusikan $y = u + \frac{1}{z}$ dengan derivatifnya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(u + \frac{1}{z}\right) = \frac{du}{dx} - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

Kepersamaan Riccati diperoleh :

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = P(x)\left(u + \frac{1}{z}\right)^2 + Q(x)\left(u + \frac{1}{z}\right) + R(x)$$

$$= P(x)\left(u^2 + \frac{2u}{z} + \frac{1}{z^2}\right) + Q(x)\left(u + \frac{1}{z}\right) + R(x)$$

$$= P(x)u^2 + \frac{2u}{z}P(x) + \frac{1}{z^2}P(x) + Q(x)u + \frac{1}{z}Q(x) + R(x)$$

$$= \left(P(x)u^2 + Q(x)u + R(x)\right) + \left(\frac{2u}{z}P(x) + \frac{1}{z^2}P(x) + \frac{1}{z}Q(x)\right)$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = \frac{du}{dx} + \left(\frac{2u}{z}P(x) + \frac{1}{z^2}P(x) + \frac{1}{z}Q(x)\right)$$

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = \frac{2u}{z}P(x) + \frac{1}{z^2}P(x) + \frac{1}{z}Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx} = -2uzP(x) - P(x) - zQ(x)$$

Diperoleh persamaan diferensial tingkat satu z :

$$\frac{dz}{dx} + \left(2uP(x) + Q(x)\right)z = -P(x)$$

Merupakan persamaan diferensial linier orde 1, dan dapat diselesaikan dengan mencari faktor integrasinya dengan cara yang telah dipelajari sebelumnya.

Langkah 3.Setelah solusi didapatkan, substitusikan $y = u + \frac{1}{z}$. Jadi dengan langkah terakhir tadi didapatkan solusi untuk persamaan diferensial Riccati

Contoh1 :

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 2xy + 2$$

Dengan $y = 2$ adalah penyelesaian khususnya.

Penyelesaian :

Diketahui suatu penyelesaian khusus $y = v(x) = 2$

Misalkan :

$$y = 2 + \frac{1}{z}$$

Sehingga :

$$dy = d\left(2 + \frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2 + \frac{1}{z}\right)$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

Substitusikan $y = 2 + \frac{1}{z}$ dan $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$ ke PD Riccati.

Diperoleh :

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = \left(2 + \frac{1}{z}\right)^2 - 2x\left(2 + \frac{1}{z}\right) + 2$$
$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = \left(4 + \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2}\right) - 2x\left(2 + \frac{1}{z}\right) + 2$$
$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} - 4x + \frac{1}{z}.(-2x) + 2$$
$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = [4 - 4x + 2] + \left[\frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{2x}{z}\right]$$

Sehingga diperoleh

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = \frac{dv}{dx} + \left[\frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{2x}{z}\right]$$
$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = \frac{4}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{2x}{z}$$

Dibagi dengan $-\frac{1}{z^2}$, diperoleh :

$$\frac{dz}{dx} = -4z - 1 + 2xz$$

Diperoleh :

$$\frac{dz}{dx} + [4 - 2x]z = -1$$

Merupakan PD linear orde-1, mempunyai faktor integrasi :

$$e^{\int(4-2x)dx} = e^{4x-x^2}$$

PD dapat ditulis sebagai :

$$dz + [4 - 2x]zdx = -dx$$

Kalikan PD dengan faktor integrasi :

$$e^{4x-x^2}dz + e^{4x-x^2}[4-2x]zdx = -e^{4x-x^2}dx$$
$$d\left[e^{4x-x^2}z\right] = -e^{4x-x^2}dx$$
$$e^{4x-x^2} = \int -e^{4x-x^2}$$
$$e^{4x-x^2} = -e^{4x-x^2} + C$$
$$C = 2e^{4x-x^2}$$

Jadi, solusi untuk PD :

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 2xy + 2$$

adalah $C = 2e^{4x-x^2}$.

Contoh 2:

Selesaikan PD Riccati dibawah ini

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 1 - \frac{1}{x^2}y^2, x > 0.$$

Penyelesaian :

Jika $y_1 = x$, maka dengan substitusi $y = x + \frac{1}{u}$ diperoleh

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = \frac{1}{x^2}$$

Sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$y = x + \frac{2x}{2Cx^2 - 1}$$

LATIHAN

Selesaikan Persamaan Riccati berikut :

1. $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x}, y_1 = -x^2, x > 0$
2. $\frac{dy}{dx} = x^3(y-x)^2 + \frac{y}{x}, y_1 = x, x > 0$
3. $\frac{dy}{dx} + 2y + y^2 = 0, y_1 = -2$

BAB VII
PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER HOMOGEN DENGAN KOEFISIEN KONSTAN

A. Persamaan Diferensial Linier Homogen Orde 2

Banyak Permasalahan di bidang teknik, Fisika, pemodelan matematika yang melibatkan Persamaan Diferensial Homogen Orde 2. Oleh sebab itu mengetahui mekanisme pemecahan masalah Persamaan Diferensial Linier Homogen Orde 2 sangatlah membantu kita untuk mencari solusinya.

Bentuk Persamaan Diferensial Linier Homogen Orde 2 :

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

pertama mari kita misalkan f(x) = 0, dengan nilai a, b, dan c konstan, maka Pers.1 menjadi

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. (2)$$

Persamaan (2) adalah bentuk umum Persamaan Diferensial Linier Homogen Orde 2 dimana ruas kanannya sama dengan 0. Apabila ruas kanan tidak sama dengan 0 maka, persamaan itu dikatakan Persamaan diferensial inhomogen orde 2.Misalkan y = u dan y = v (dimana u dan v adalah fungsi x yang menjadi dua solusi dari persaman

$$a\frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + cu = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(3)$$

dan

$$a\frac{d^2v}{dx^2} + b\frac{dv}{dx} + cv = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(4)$$

tambahkan Persamaan (3) dan (4)

$$\left(a\frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + cu\right) + \left(a\frac{d^2v}{dx^2} + b\frac{dv}{dx} + cv\right) = 0$$

$$\left(a\frac{d^2u}{dx^2} + a\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \left(b\frac{du}{dx} + b\frac{dv}{dx}\right) + (cu + cv) = 0$$

$$a\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx^2}\right) + b\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right) + c(u + v) = 0 \dots\dots.(5)$$

dimana

$$\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

dan

$$\frac{d^2}{dx^2}(u + v) = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx^2}$$

jadipersamaan (5) dapat ditulis

$$a\frac{d^2}{dx^2}(u + v) + b\frac{d}{dx}(u + v) + c(u + v) = 0$$

maka substitusikan (gantikan) y = u+v

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

dan y = u+v

jika a = 0, maka Pers. 1 menjadi Pers differential liniar orde satu (PDL01)

$b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \rightarrow b\frac{dy}{dx} = -cy$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{b}y$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{c}{b}y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + ky = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -ky$$

$$\frac{dy}{y} = -kdx$$

dimana $k = \frac{c}{b}$

integralkan persamaan diatas

$$\int \frac{dy}{y} = \int -kdx$$

kita dapatkan

$$Ln\, y = -kx + c$$

$$e^{\ln y} = e^{-kx+c}$$

$$y = \mathrm{e}^{-\mathrm{kx}+\mathrm{c}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{kx}}\mathrm{e}^{\mathrm{c}} = \mathrm{Ae}^{-\mathrm{kx}}$$

kita gantikan -k dengan m, maka

$$y = Ae^{mx} \ldots\ldots.(6)$$

Pers.(6) tidak hanya solusi untuk PDL01 tetapi juga bisa menjadi solusi untuk Persamaan Diferensial Linier Homogen Orde 2 dimana

$$y = Ae^{mx}$$

$$\frac{dy}{dx} = Ame^{mx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Am^2e^{mx}$$

Pers.2 dapat ditulis

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(2)$$

$$aAm^2e^{mx} + bAme^{mx} + cAe^{mx} = 0$$

bagi dengan Ae^{mx} kita dapat

$am^2 + bm + c = 0$.........(7)

yang merupakan persamaan kuadrat,yang akar-akar kuadratnya $m = m_1$ dan $m = m_2$dimana kita sudah lihat jika y = u dan y = v adalah dua solusi untuk Persamaan Diferensial Homogen Orde 2 dan juga y = u+v. Jika

$y = Ae^{m_1x}$ dan $y = Be^{m_2x}$,

maka solusi untuk Persamaan Diferensial Linier Homogen Orde 2 dapat ditulis

$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$.........(8)

persamaan kuadrat ini dikatakan persamaan tambahan (Auxiliary Equation)solusi Persamaan Diferensial Linier Homogen Orde 2 sangat tergantung dari jenis akar-akar persamaan tambahan. Ada tiga jenis solusi untuk Persamaan Diferensial Linier Homogen Orde 2, yaitu :

Akar real dan berbeda (Determinan > 0)

Akar real dan sama(Determinan = 0)

Akar kompleks(Determinan < 0)

$$\text{Dimana } determinan(D) = b^2 - 4ac$$

jadi solusi untuk persamaan diferensial Linier homogen orde 2 kita adalah

$y = Ae^{-x} + Be^{-2x}$

a. Akar real dan Berbeda.

Untuk akar sama atau kembar solusinya adalah

$$\boldsymbol{y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}}$$

Contoh :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

persamaan tambahannya adalah

$$m^2 + 5m + 6 = 0$$

faktorkan persamaan diatas

$$(\mathrm{m} + 2)(\mathrm{m} + 3) = 0$$

m = -2 dan m = -3

maka akarnya real dan berbeda. Jadi solusi untuk persamaan diferensial Linier homogen orde 2 kita adalah

$$y = Ae^{-2x} + Be^{-3x}$$

b. Akar real dan sama

Untuk akar sama atau kembar solusinya adalah

$$y = A\boldsymbol{e^{m_1x}} + \boldsymbol{Bxe^{m_1x}}$$

Contoh :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

persamaan tambahannya adalah

$$m^2 + 6m + 9 = 0$$

faktorkan persamaan diatas

$$(\mathrm{m} + 3)(\mathrm{m} + 3) = 0$$

$m = -3$ dan $m = -3$

maka akarnya sama atau kembar

jadi solusi untuk persamaan diferensial Linier homogen orde 2 kita adalah

$$y = Ae^{-3x} + Bxe^{-3x}$$

atau

$$y = e^{-3x}(A + Bx)$$

c. **Akar kompleks/imaginer**

Rumus untuk akar kompleks atau imaginer adalah

$$\boldsymbol{y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)}$$

akar kompleks adalah akar yang didalamnya terdapat tanda negativ. Untuk lebih jelasnya lihat contoh dibawah ini.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

Persamaan tambahannya adalah

$$m^2 + 4m + 9 = 0$$

persamaan kuadrat diatas tidak bisa diselesaikan dengan pemfaktoran. Maka digunakan rumus ABC sebagai solusinya

$$m_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m_{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$m_{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{-20}}{2}$$

$$m_{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}\sqrt{-5}}{2}$$

$$m_{12} = \frac{-4 \pm 2j\sqrt{5}}{2}$$

$$m_{12} = -2 \pm j\sqrt{5}$$

maka α=-2 dan $\beta=\sqrt{5}$

maka solusinya adalah

$$y = e^{-2x}(Acos\sqrt{5}x + Bsin\sqrt{5}x)$$

coba kerjakan contoh ini sebagai latihan

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2} - 2\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + 10\mathrm{y} = 0$$

di samping 3 bentuk akar diatas, ada beberapa bentuk khusus Persamaan Diferensial Linier Homogen Orde 2. Ada dua bentuk khusus yaitu

$$\frac{d^2y}{dx^2} - n^2y = 0$$

maka solusinya

y = A Cosh nx + B Sinh nx

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$$

maka solusinya

y = A Cos nx + B Sin nx

Contoh :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$$

maka $n2 = -16$, $n = +j_4$

solusinya

$$y = A\,Cos\,4x + B\,Sin\,4x$$

LATIHAN SOAL

1. $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2} - 12\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + 36\mathrm{y} = 0$
2. $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2} + 2\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} - 3\mathrm{y} = 0$
3. $2\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2} + 4\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + 3\mathrm{y} = 0$
4. $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2} - 9\mathrm{y} = 0$
5. $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^2} + 7\mathrm{y} = 0$

BAB VIII
PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER NON HOMOGEN ORDE DUA

Definisi :Persamaan Diferensial Orde 2 Non Homogen

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$$

Jika$f(x) \neq 0$ maka substitusi $y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$ akan membuat sisi kiri diatas sama dengan nol. Maka :

$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x} + X$, X = fungsi tambahan.

$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$ → fungsi komplementer

$y = x$ → integral khusus.

Prosedur umum penyelesaian Persamaan Diferensial Linier tak Homogen adalah

Langkah pertama : menentukan solusi umum Persamaan Diferensial Linier Homogen biasa disebut fungsi komplemen ($y_h(x)$)

Langkah kedua : menentukan solusi umum Persamaan Diferensial tak homogen biasa disebut Integral khusus ($y_p(x)$)

Langkah ketiga : menentukan solusi umum Persamaan Diferensial

$$\boldsymbol{y = y_h(x) + y_p(x)}$$

Contoh 1 :

Tentukan solusi umum PD berikut ini :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 1$$

Langkah I : menentukan solusi umum PD linier homogen.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

Mencari akar-akar karakteristik sehingga PD Linier homogen diubah menjadi

$$m^2 + 1 = 0$$

$$m = \sqrt{-1}$$

$$= i\sqrt{1}$$

Solusi umum : $y_h(x) = A\cos x + B\sin x$

Langkah II : menentukan solusi umum PD linier tak homogen.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 1$$

Solusi umum $y_p(x) = 1$

Langkah III : $y = y_h(x) + y_p(x) = A\cos x + B\sin x + 1$

Contoh 2:

Selesaikan persamaan diferensial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x^2$$

Penyelesaian :

Fungsi komplemen sehingga f(x) = 0

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$(m - 2)(m - 3) = 0$$

Maka akar-akar karakteristiknya : m = 2 dan m = 3

Sehingga

$$y = Ae^{2x} + Be^{3x}$$

Integral khusus → fungsi derajat dua

Misal

$$y = Cx^2 + Dx + E$$

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx + D$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2C$$

Substitusikan ke persamaan

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x^2$$

$2C - 5(2C + D) + 6(Cx^2 + Dx + E) = x^2$

$2C - 10Cx - 5D + 6Cx^2 + 6Dx + 6E = x^2$

$6Cx^2 - (10C - 6D)x + (6E + 2C - 5D) = x^2$

$6C = 1 \rightarrow C = \frac{1}{6}$

$6D - 10C = 0 \rightarrow D = \frac{5}{18}$

$2C - 5D + 6E = 0 \rightarrow E = \frac{19}{108}$

Penyelesaian Umum = fungsi komplemen + Integral Khusus

= $Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$

Menentukan nilai-nilai konstanta

Jika $f(k) = k$	Asumsikan $y = C$
$f(x) = kx$	$y = Cx + D$
$f(x) = kx^2$	$y = Cx^2$
$f(x) = k \sin x$ atau $k \cos x$	$y = C \cos x + D \sin x$
$f(x) = k \sinh x$ atau $k \cosh x$	$y = C \cosh x + D \sinh x$
$f(x) = e^{kx}$	$y = Ce^{kx}$

Sebagai panduan untuk menentukan himpunan bebas linier dari koefisien tak tentu dari suku tak homogen dapat dilihat dari tabel berikut:

Tabel 4.1 Himpunan bebas linier koefisien tak tentu dari suku tak homogen

No	Suku tak homogen	Himpunan koefisien tertentu
1	x^n	$\{x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1\}$
2	e^{ax}	$\{e^{ax}\}$
3	$\sin(bx+c)$, $\cos(bx+c)$	$\{\sin(bx+c), \cos(bx+c)\}$
4	$e^{ax}\sin(bx+c)$, $e^{ax}\cos(bx+c)$	$\{e^{ax}\sin(bx+c), e^{ax}\cos(bx+c)\}$
5	$x^n e^{ax}$	$\{x^n e^{ax}, x^{n-1}e^{ax}, \dots, xe^{ax}, e^{ax}\}$
6	$x^n\sin(bx+c)$, $x^n\cos(bx+c)$	$\{x^n\sin(bx+c), x^n\cos(bx+c), x^{n-1}\sin(bx+c), x^{n-1}\cos(bx+c), \dots, x\sin(bx+c), x\cos(bx+c), \sin(bx+c), \cos(bx+c)\}$
7	$x^n e^{ax}\sin(bx+c)$, $x^n e^{ax}\cos(bx+c)$	$\{x^n e^{ax}\sin(bx+c), x^n e^{ax}\cos(bx+c), x^{n-1}e^{ax}\sin(bx+c), x^{n-1}e^{ax}\cos(bx+c), \dots, xe^{ax}\sin(bx+c), xe^{ax}\cos(bx+c), e^{ax}\sin(bx+c), e^{ax}\cos(bx+c)\}$

Dari Tabel 4.1 kita dapatkan bahwa jika suku tak homogen $q(x) = x^5 + \sin x + x^2 e^{3x}$ maka himpunan bebas linier koefisien tak tentu diberikan oleh:

$$\{x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1, \sin x, \cos x, x^2e^{3x}, xe^{3x}, e^{3x}\}$$

sehingga solusi khususnya akan mempunyai bentuk:

$$Y = C_1x^5 + C_2x^4 + C_3x^3 + C_4x^2 + C_5Ex + C_6F + C_7\sin x + C_8\cos x + C_9x^2e^{3x} + C_{10}xe^{3x} + C_{11}e^{3x}$$

dimana $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{11}$ adalah konstant rill.

Penggunaan Variabel Kompleks untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Orde Dua

Selain dari metode koefisien tak tentu, persamaan diferensial orde dua tertentu dapat juga diselesaikan dengan menggunakan variabel kompleks. Pandanglah lagi persamaan (4.1), dengan mengubah $Q(x)$ sebagai fungsi variabel kompleks, solusi khusus Y memenuhi hal-hal sebagai berikut:

- Bagian rill Y adalah solusi persamaan (4.1) dengan $Q(x)$ digantikan oleh bagian rillnya.
- Bagian imajiner Y adalah solusi persamaan (4.1) dengan $Q(x)$ digantikan oleh bagian imajinernya.

Contoh 4.3.1: Tentukan solusi khusus persamaan diferensial

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x \qquad (4.46)$$

Penyelesaian: Untuk menyelesaikan persamaan ini, pandanglah persamaan diferensial

$$y'' - 3y' + 2y = e^{ix}, \qquad (4.47)$$

dimana

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x. \qquad (4.48)$$

Dengan menggunakan prosedur 2 di atas, dapat kita simpulkan bahwa bagian imajiner solusi khusus persamaan (4.7) merupakan solusi khusus persamaan (4.46). Sekarang kita mencari solusi khusus persamaan diferensial (4.47) dengan menggunakan metode koefisien tak tentu. Dengan melihat bentuk suku tak homogen persamaan (4.47), solusi khusus yang berpadanan dengan bentuk tak homogen ini adalah:

$$Y = (A + Bi)e^{ix}. \qquad (4.49)$$

Dengan mensubstitusikan fungsi ini ke persamaan diferensial (4.47) diperoleh $A = i/10$ dan $B = 3/10$. Dengan nilai A dan B ini diperoleh:

$$Y = \frac{1}{10}e^{ix} + \frac{3}{10}ie^{ix}$$

$$= \frac{1}{10}(\cos x + i\sin x) + \frac{3}{10}i(\cos x + i\sin x)$$

$$= \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x + i(\frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x). \qquad (4.50)$$

Bagian imajiner dari Y adalah $\frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x$. Karenanya solusi khusus (4.47) diberikan oleh:

$$Y = \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x \qquad (4.51)$$

LATIHAN SOAL

1. Selesaikan persamaan diferensial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 2\sin 4x$$

2. Tentukan nilai A dan B

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = 13\, e^{3x} \text{jika} x = 0, y = \frac{5}{2} \text{dan} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$$

B. METODE VARIASI PARAMATER

Pada bagian ini dipelajari suatu metode untuk mencari integral khusus persamaan diferenial linear non homogen. Metode yang dipelajari di sini adalah metode variasi parameter. Berikut ini akan diberikan langkah-langkah dalam metode variasi parameter untuk persamaan diferensial linear homogen order dua, untuk order yang lebih tinggi dilakukan secara analog.

Diberikan persamaan diferensial linear non homogen order dua

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x) \qquad (3.41)$$

Misalkan fungsi komplemen persamaan diferensial (3.41) adalah $y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ dengan c_1 dan c_2 sebarang konstanta. Metode di dalam variasi parameter adalah dengan mengganti konstanta c_1 dan c_2 dengan fungsi v_1 dan v_2 yang akan dicari kemudian sehingga $v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$ akan menjadi integral khusus persamaan diferensial (3.41).

Fungsi-fungsi v_1 dan v_2 di atas dicari dengan cara sebagai berikut. Diasumsikan $y_{p=}v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$ suatu integral khusus persamaan (3.41). Selanjutnya dicari y'_p sebagai berikut:

$$y'_p(x) = v_1(x)y'_1(x) + v_2(x)y'_2(x) + v'_1(x)y_1(x) + v'_2(x)y_2(x)$$

Jika diambil

$$v'_1(x)y_1(x) + v'_2(x)y_2(x) = 0 \qquad (3.42)$$

maka y'_p tinggal menjadi

$$y'_p(x) = v_1(x)y'_1(x) + v_2(x)y'_2(x)$$

dengan menurunkan sekali lagi didapat

$$y''_p(x) = v_1(x)y''_1(x) + v_2(x)y''_2(x) + v'_1(x)y'_1(x) + v'_2(x)y'_2(x)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan y_p, y'_p dan y''_p ke (3.41) diperoleh

$$v_1(x)\left[a_0(x)y''_1(x) + a_1(x)y'_1(x) + a_2(x)y_1(x)\right] + v_2(x)[a_0(x)y''_2(x) + a_1(x)y'_2(x) + a_2(x)y_2(x)] + a_0(x)\left[v'_1(x)y'_1(x) + v'_2(x)y'_2(x)\right] = F(x)$$

Karena y_1 dan y_2 solusi persamaan diferensial homogen yang berkorespondensi dengan persamaan diferensial (3.41) maka persamaan di atas menjadi:

$$v'_1(x)y'_1(x) + v'_2(x)y'_2(x) = \frac{F(x)}{a_0(x)}$$

Dengan hasil terakhir di atas dan persamaan (3.42) diperoleh sistem persamaan

$$v'_1(x)y_1(x) + v'_2(x)y_2(x) = 0 \tag{3.43}$$

$$v'_1(x)y'_1(x) + v'_2(x)y'_2(x) = \frac{F(x)}{a_0(x)}$$

Dengan menyelesaikan sistem di atas untuk v'_1 dan v'_2 diperoleh

$$v'_1(x) = -\frac{F(x)y_2(x)}{a_0(x)W[y_1(x), y_2(x)]}$$

$$v'_2(x) = -\frac{F(x)y_1(x)}{a_0(x)W[y_1(x), y_2(x)]}$$

Dengan perhitungan mengikuti aturan Wronkian

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}$$

Selanjutnya dengan mengintegralkan v'_1 dan v'_2 diperoleh v_1 dan v_2 sehingga diperoleh integral khusus persamaan (3.41) seperti diinginkan.

Contoh 3.15 Tentukan penyelesaian umum persamaan diferensial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{1}{1+e^x} \tag{3.44}$$

Penyelesaian:

Persamaan diferensial homogen yang berkorespondensi dengan (3.44) yaitu:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$
(3.45)

mempunyai persamaan karakteristik $m^2 + 3m + 2 = 0$. Akar-akar persamaan karakteristik tersebut adalah $m_1 = -2$ dan $m_2 = -1$ sehingga solusi umum persamaan diferensial (3.45) adalah

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$$

dengan c_1 dan c_2 sebarang konstanta, selanjutnya c_1 dan c_2 diganti dengan fungsi v_1 dan v_2 sehingga

$$y'_p(x) = -e^{-x}v_1(x) - 2v_2(x)e^{-2x} + v'_1(x)e^{-x} + v'_2(x)e^{-2x}$$

Jika diambil

$$v'_1(x)e^{-x} + v'_2(x)e^{-2x} = 0 \tag{3.46}$$

diperoleh $y''_p(x) = e^{-x}v_1(x) + 4v_2e^{-2x} - v'_1(x)e^{-x} + 2v'_2(x)e^{-2x}$. Selanjutnya dengan mensubstitusikan y_p, y'_p dan y''_p di atas ke persamaan (3.44) diperoleh

$$e^{-x}v_1(x) + 4v_2e^{-2x} - v'_1(x)e^{-x} + 2v'_2(x)e^{-2x} + 3(-e^{-x}v_1(x) - 2v_2(x)e^{-2x}) + 2(v_1(x)e^{-x} + v_2(x)e^{-2x} = \frac{1}{1+e^x}$$

atau

$$-v'_1(x)e^{-x} + 2v'_2(x)e^{-2x} = \frac{1}{1+e^x}$$

Hasil terakhir di atas dan persamaan (3.46) membentuk sistem persamaan

$-v'_1(x)e^{-x} + 2v'_2(x)e^{-2x} = \frac{1}{1+e^x}$

(3.47)

$$v_1(x)e^{-x} + v_2(x)e^{-2x} = 0.$$

Berdasarkan sistem persamaan (3.47) diperoleh

$$v'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{1+e^x} & -2e^{-2x} \\ 0 & e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e^{-x} & -2e^{-2x} \\ e^{-x} & e^{-2x} \end{vmatrix}} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$v'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & \frac{1}{1+e^x} \\ e^{-x} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -e^{-x} & -2e^{-2x} \\ e^{-x} & e^{-2x} \end{vmatrix}} = -\frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

Dengan menginteralkan v'_1 dan v'_2 di atas diperoleh

$$v'_1(x) = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \ln|1+e^x| + c_3$$

$$v'_2(x) = \int -\frac{e^{2x}}{1+e^x} = \int -\frac{e^{2x}}{1+e^x}d(e^x)$$

$$= -\int \frac{e^x+1-1}{1+e^x}d(e^x) =$$

$$-\int d(e^x) + \int \frac{1}{1+e^x}d(\,1+e^x) = -e^x + \ln\;|1+e^x| + c_4$$

Jadi diperoleh

$$y_p = (\ln|1 + e^x| + c_3)e^{-x} + (-e^x + \ln\,|1 + e^x| + c_4)e^{-2x}$$

sehingga solusi umu persamaan diferensial (3.44) adalah

$$y = y_c + y_p$$

$$= c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + (\ln|1 + e^x| + c_3)e^{-x} + (-e^x + \ln\,|1 + e^x| + c_4)e^{-2x}$$

$$= k_1e^{-x} + k_2e^{-2x} + e^{-x}\ln|1 + e^x| + e^{-2x}\ln|1 + e^x|$$

dengan k_1 dan k_2 sebarang konstanta.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Tentukan solusi umum persamaan diferensial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \tan x. \sec x$$

2. Tentukan solusi umum persamaan diferensial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = e^{-2x}\sec x$$

3. Tentukan solusi umum persamaan diferensial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^3}$$

4. Tentukan solusi umum persamaan diferensial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 10y = 3x^4 + 6x^3$$

   Jika diketahui $y = x^2$ solusi persaaan diferensial homogen yang berkorespondensi dengan persamaan diferensial di atas.

5. Tentukan solusi umum persamaan diferensial

$$(x^2 + 2x)\frac{d^2y}{dx^2} - 2(x + 1)\frac{dy}{dx} + 2y = (x + 2)^2$$

   Jika diketahui $y = x + 1$ solusi persaaan diferensial homogen yang berkorespondensi dengan persamaan diferensial di atas.

BAB IX
TRANSFORMASI LAPLACE PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Definisi 1:

Misalkan f(t) merupakan suatu fungsi dari t terdefinisi untuk t > 0. Kemudian $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$, jika ada dinamakan suatu fungsi dari s, dapat dikatakan $F(s)$. Oleh karena itu fungsi $F(s)$ ini dapat dinamakan transformasi laplace dari f(t) dan dinotasikan oleh " $\boldsymbol{L\{f(t)\}}$**".**Jadi

$$L\{\boldsymbol{f(t)}\} = \boldsymbol{F(s)} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Definisi 2 :

Jika $L\{f(t)\} = F(s)$ maka f(t) dinamakan Transformasi Laplace Invers dari F(s) dan dinotasikan dengan $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$. Kemudian untuk mencari nilai $L^{-1}\{F(s)\}$, maka kita harus mencari suatu fungsi dari t yang transformasi Laplacenya adalah F(s).

Untuk mempermudah transformasi laplace invers, perhatikan tabel 9 berikut ini : (Kartono, 1994:286)

Tabel 9. Fungsi F(s) dan transformasi Laplace invers

NO	$\boldsymbol{F(s) = L\{f(t)\}}$	$\boldsymbol{f(t) = L\{F(s)\}}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^n}, n = 1,2,\ldots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
3	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
4	$\frac{1}{(s-a)^n}, n = 1,2,\ldots$	$\frac{1}{(n-1)!}(t^{n-1}e^{at})$
5	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, a \neq b$	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$
6	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, a \neq b$	$\frac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})$
7	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{1}{a}\sin at$
8	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
9	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a}\sinh at$
10	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
11	$\frac{1}{(s-a)^2 + b^2}$	$\frac{1}{b}e^{at}\sin bt$
12	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	$e^{at}\cos bt$
13	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^2}(1 - \cos at)$
14	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^3}(at - \sin\ at)$

15	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
16	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}\sin at$
17	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin at + at\cos at)$
18	$\frac{s}{(s^2+a^2)+(s^2+b^2)}, (a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos at - \cos bt)$

Metode pecahan parsial dapat digunakan ketika fungsi yang diinverskan adalah suatu pecahan aljabar rasional. Dalam kasus yang demikian ini, fungsi dapat diselesaikan ke dalam pecahan parsial dan kemudian transformasikan inversnya.

Teorema 9.3.1 (transformasi Laplace dari turunan)

Jika $L\{f(t)\} = F(s)$ maka $L = \{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$, dengan disediakan limit :

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$$

Bukti:

$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$

$= e^{-st} f(t)|_0 + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$

$= 0 - f(0) + s\, L\, \{f(t)\}$

$= sL\{f(t)\} - f(0)$

$= sF(s) - f(0)$

Akibatnya:

$$L\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Bukti:

Karena $L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$ maka

$$
\begin{aligned}
L\{f''(t)\} &= sL\{f'(t)\} - f'(0) \\
&= s[sL\{f(t)\} - f(0)] - f'(0) \\
&= s^2L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \\
&= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}
$$

Secara sama kita dapat menunjukkan bahwa:

$$L\{f^{III}(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf^1(0) - f^{II}(0)$$

Pada umumnya belaku bahwa:

$$L\{f^n(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^1(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$$

A. Rumus Inversi Penting yang Lain

a. Berdasarkan transformasi laplace dari integral yaitu:
   Jika $L\{f(t)\} = F(s)$ maka $L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$
   Dari sini berarti bahwa:
   Jika $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ maka $L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)du$

b. Berdasarkan teorema yang mengatakan bahwa:
   Jika $L\{f(t)\} = F(s)$ maka $L\{t\,f(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s) = -F'(s)$
   Dari sini berarti bahwa:
   Jika $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ maka $L^{-1}\{F'(s)\} = -t\,f(t)$

c. Berdasarkan teorema 8.3.1
   Jika $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ maka $L^{-1}\{sF(s)\} = f'(t)$ disediakan $f(0) = 0$

d. Rumus $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(s)\,ds$ adalah sangat berguna dalam pencarian $f(t)$ disaat $F(s)$ diberikan, disediakan untuk transformasi inves dari ruas sebelah kanan yang dapat dihitung secara konvensional.

e. Teorema Konvolusi

Jika $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ dan $L^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, maka

$$L^{-1}\{F(s), G(s)\} = \int_0^t f(u).\, g(t-u)du$$

Contoh:

Selesaikan setiap masalah nilai awal di bawah ini:

1. $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$

Pembahasan:

Persamaan diferensial diatas dapat ditulis dalam bentuk:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

Kenakan transformasi Laplace pada kedua ruasnya, yaitu:

$$L\{y''\} - 2L\{y'\} + 2L\{y\} = L(0)$$

Berdasarkan teorema 9.3.1 dan kondisi awal, diperoleh bahwa:

$$\begin{aligned} L\{y''\} &= s^2Y(s) - s\,y(0) - y'(0) \\ &= s^2Y(s) - s.1 - 1 \\ &= s^2Y(s) - s - 1 \\ &= s^2Y - s - 1 \\ L\{y'\} &= sY(s) - y(0) \\ &= sY(s) - 1 \\ &= sY - 1 \end{aligned}$$

$L\{y) \qquad = Y(s) = Y$

Ini semua disubstitusikan kedalam transformasi laplace dari persamaan diferensial yang diberikan, yaitu:

$$[s^2Y - s - 1] - 2[sY - 1] + 2Y = 0$$
$$\Leftrightarrow s^2Y - 25Y + 2Y + 1 - s = 0$$

Persamaan ini dinamakan persamaan pembantu.

Selesaikan persamaan pembantu ini:

$$\Leftrightarrow (s^2 - 25 + 2)Y + 1 - s = 0$$
$$\Leftrightarrow (s^2 - 25 + 2)Y = s - 1$$
$$\Leftrightarrow Y = \frac{s-1}{s^2 - 25 + 2}$$
$$\Leftrightarrow Y = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}$$

Kenakan transformasi laplace invers pada kedua ruasnya, yaitu:

$$L^{-1}\{Y\} = L^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}\right\}$$
$$y = e^t \cos t$$

∴ Solusi khusus P.D yang memenuhi kedua kondisi awal diatas adalah:

$$y(t) = e^t \cos t$$

2. $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = 3\cos 3t - 11\sin 3t\,, y(0) = 0, y'(0) = 6$

Pembahasan:

Persamaan diferensial diatas dapat ditulis dalam bentuk:

$$y'' + y' - 2y = 3\cos 3t - 11\sin 3t$$

Kenakan transformasi Laplace pada kedua ruasnya, yaitu:

$$L\{y''\} + L\{y'\} - 2L\{y\} = 3L\{\cos 3t\} - 11L\,\{\sin 3t\}$$

Berdasarkan teorema 9.3.1 dan kondisi nilai awal:

$$[s^2Y - sy(0) - y'(0)] + [sY - y(0)] - 2Y$$
$$= 3.\frac{5}{s^2+9} - 11.\frac{3}{s^2+9}$$
$$\Leftrightarrow [s^2Y - s.0 - 6] + [sY - 0] - 2Y = \frac{3s-33}{s^2+9}$$
$$\Leftrightarrow s^2Y - 6 + sY - 2Y = \frac{3s-33}{s^2+9}$$

Dinamakan persamaan pembantu

Selesaikan persamaan pembantu ini

$$\Leftrightarrow (s^2+s-2)Y \quad = \frac{35-33}{s^2+9} + 6$$
$$= \frac{6s^2+3s+21}{s^2+9}$$
$$\Leftrightarrow \quad Y \quad = \frac{6s^2+3s+21}{(s^2+9)(s^2+s-2)}$$
$$\Leftrightarrow \quad Y \quad = \frac{6s^2+3s+21}{(s^2+9)(s+2)(s-1)}$$
$$\Leftrightarrow \quad Y \quad = \frac{3}{s^2+9} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}$$

[Dipecah kedalam pecahan parsial]

Kenakan transformasi laplace invers pada kedua ruasnya, yaitu:

$$L^{-1}\{Y\} = L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$
$$y(t) = \sin 3t + e^t - e^{-2t}$$

∴ Solusi khusus P.D yang memenuhi kedua kondisi nilai awal diatas adalah:

$$y(t) = \sin 3t + e^t - e^{-2t}$$

LATIHAN

Selesaikan setiap masalah nilai awal dibawah ini:

1. $(D^3 + D)x = 2, x(0) = 3, x'(0) = 1, x'' = -2$
2. $y'' + wy = 0, y(0) = A, y'(0) = B, (w \neq 0)$
3. $y'' - 2y' - 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 7$
4. $\frac{d^2y}{dt^2} + x = t\cos 2t, x(0) = 0, x'(0) = 0$
5. $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 4e^{2t}, y(0) = -3, y'(0) = 5$

BAB X
PENERAPAN PERSAMAAN DIFERENSIAL

A. Pertumbuhan dan Peluruhan

Salah satu contoh kasus pemodelan matematika yang menggunakan konsep persamaan diferensial, misalkan jika waktu dinyatakan dengan t satuan, dan jumlah kuantitas yang ada pada setiap saat dinyatakan dengan x satuan, maka bentuk persamaan diferensialnya, yaitu :$\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = kx,}$ dimana k konstanta dan $x > 0$ untuk setiap $t \geq 0$. Jika x bertambah untuk t yang bertambah, maka $k > 0$, dan kita peroleh hukum pertumbuhan wajar. Sedangkan jika x berkurang bila t bertambah, maka $x < 0$ dan diperoleh hukum peluruhan wajar. Misalkan kita akan menyelesaikan permasalahan pada contoh dibawah ini :

Contoh 1:

Laju pertumbuhan radium berbanding lurus dengan jumlah zat yang ada setiap saat. Jika 60 mg radium tersedia sekarang dan waktu paruhnya adalah 1690 tahun, maka berapa jumlah radium yang ada 100 tahun kemudian.

Jawab :

Misalkan t tahun telah berlangsung sejak sekarang, dan x adalah banyaknya radium dalam t tahun, maka terlebih dahulu kita merubah persamaan

$$\frac{dx}{dt} = kx$$
$$\frac{dx}{x} = kdt$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int k\ dt$$
$$\ln x = kt + C$$
$$e^{\ln x} = e^{kt+c}$$
$$x = C\ e^{kt}$$

Dengan $C = e^{c}$

Perhatikan tabel bantu dibawah ini

t	0	100	1690
x	60	?	30

Selanjutnya dengan memperhatikan syarat batas yang diberikan (lihat tabel)

- Ketika $t = 0 \rightarrow 60 = C\ e^{k.0} = C$. Jadi $C\ =\ 60$....(1)
- Ketika $t = 1690 \rightarrow 30 = C\ e^{k.1690}$.............................(2)

Substitusikan persamaan 1 ke persamaan 2, sehingga

$30 = 60\ e^{k.1690}$................(3)

Dari persamaan 3 tersebut kita dapat memperoleh nilai k, yaitu dengan perhitungan :

$30 = 60\ e^{k.1690}$
$e^{k.1690} = 0{,}5$
$\ln e^{k.1690} = \ln 0{,}5$
$k.\,1690 \ln e = \ln 0{,}5$

Ingat $\ln e = 1$ dan $\ln 0{,}5 = -0{,}69315$, sehingga

$k.1690 = -0{,}69315$

$$k = -\frac{0{,}69315}{1690} = -0{,}00041$$

Dengan mensubstitusikan nilai C dan k ke persamaan awal maka diperoleh :

$x = 60\ e^{-0{,}00041t}$

untuk $t = 100$,

$x = 60\ e^{-0{,}00041\,(100)}$

$x = 60e^{-0{,}041}$

$x = 57{,}6$

Jadi dapat disimpulkan untuk 100 tahun sejak sekarang akan terdapat 57,6 mg radium.

Contoh 1 di atas menggambarkan suatu fungsi yang dikatakan mempunyai peluruhan eksponesial. Pada contoh tersebut $k < 0$, dan $x = f(t)$, dimana $\lim_{t\to\infty} f(t) = C\ \lim_{t\to\infty} e^{kt} = 0$. Jadi akhirnya $f(t)$ akan menuju ke nol.

Selanjutnya akan kita lihat jika suatu kuantitas bertambah dengan laju berbanding lurus dengan selisish suatu bilangan positif A dengan ukuran kuantitas tersebut. Jika waktu dinyatakan dengan satuan t satuan dan jumlah kuantitas pada setiap saat adalah x satuan, maka diperoleh persaman $\frac{dx}{dt} = k(A - x)$, dengan k konstanta positif dan $x < A$ untuk setiap t. Persamaan ini dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{dx}{A-x} = k\ dt$. Dengan mengintegralkan kedua ruas, maka kita peroleh :

$$\int \frac{dx}{A - x} = \int k\ dt$$

$-\ln(A-x) = kt + C$

$\ln(A-x) = -kt - C$

$e^{\ln(A-x)} \ = e^{-kt-c}$

$A - x = e^{-kt}e^{-c}$

$x = A - Ce^{-kt}$

Dengan A, B, dan k konstanta positif serta $x = f(t)$ menyatakan jumlah kuantitas pada saat t. Hasil ini memberikan suatu fungsi pertumbuhan terbatas, karena

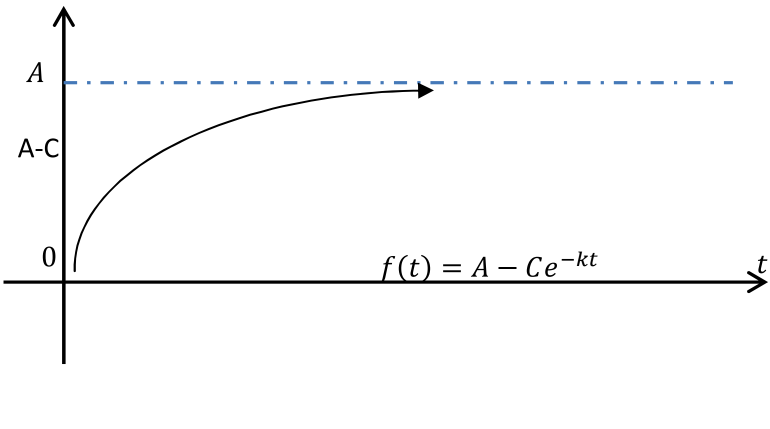
$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty}\left(A - Ce^{-kt}\right)$

$= A - C \lim_{t\to\infty} e^{-kt}$

$= A - C.0$

$= A$

Dengan demikian $x = f(t)$ akan mendekati A dari kiri (lihat gambar).



B. A Discrete One Species Model

Pada bagian ini, salah satu model paling sederhana pertumbuhan penduduk dari spesies telah dikembangkan. Data khas pada variasi penduduk dari spesies didaerah tertentu mungkin ditunjukan dalam gambar 32-1, dimana pengukuran mungkin telah diambil alih oleh interval waktu Δt. Laju perubahan penduduk yang diukur selama interval waktu Δt akan menjadi

$$\frac{\Delta \boldsymbol{N}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{N}(\boldsymbol{t}+\Delta \boldsymbol{t}) - \boldsymbol{N}(\boldsymbol{t})}{\Delta \boldsymbol{t}}$$

Hal ini menunjukan angka absolut dari peningkatan penduduk. Sebuah jumlah yang akan membuktikan menjadi cukup penting adalah laju perubahan penduduk per individu, $R(t)$. Ini disebut angka pertumbuhan per satuan waktu. Sebagai contoh,

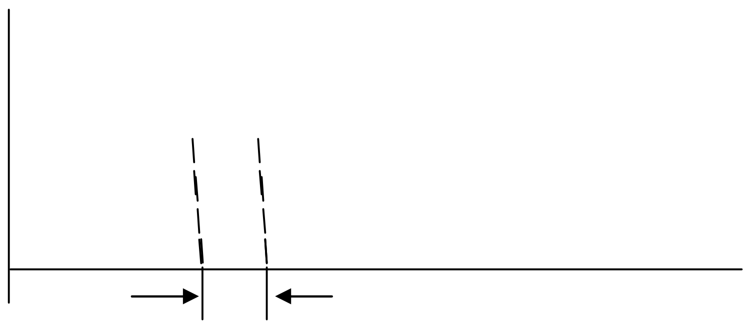


Figure 32-1 Data khas dalam penduduk $N(t)$

per tahun, yang diukur selama interval waktu Δt :

$$\boldsymbol{R(t) = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t N(t)}}$$

persamaan 32.1

Perubahan persentase penduduk adalah $100\frac{\Delta N}{N(t)} = 100R(t)\Delta t$. Sehingga seratus kali laju pertumbuhan $R(t)$adalah perubahan persentase pada penduduk per satuan waktu. Sebagai contoh, jika dalam setengah tahun penduduk meningkat sebesar 20% maka $R(t) = \frac{2}{5}$dan angka pertumbuhan sebesar 40% per tahun (yang diukur untuk setengah tahun). Persamaan 32.1 tidak dapat digunakan untuk menentukan penduduk pada waktu masa depan karena itu hanya definisi dari $R(t)$. Namun jika angka pertumbuhan dan penduduk awal diketahui maka penduduk di kemudian waktu dapat dihitung :

$$\boldsymbol{N(t+\Delta t) = N(t) + \Delta t R(t) N(t)} \qquad (32.2)$$

Kami berasumsi bahwa penduduk dari spesies yang hanya berubah karena kelahiran dan kematian. Tidak ada percobaan di luar slip beberapa spesies tambahan ke dalam sistem. Tidak ada migrasi masuk atau keluar wilayah tersebut. Demikian

$$\boldsymbol{N(t+\Delta t) = N(t) + (\#\, kelahiran) - (\#\, kematian)}$$

Para reproduksi (kelahiran) angka b satuan waktu diukur selama interval waktu Δt dan angka kematian $d$didefinisikan sebagai

$$\boldsymbol{b = \frac{(\#\, kelahiran)}{\Delta t N(t)}\, d = \frac{(\#\, kematian)}{\Delta t N(t)}}$$

Akibatnya, penduduk pada suatu waktu kemudian Δt, $N(t+\Delta t)$ adalah

$$\boldsymbol{N(t+\Delta t) = N(t) + \Delta t(b-d)N(t)}$$

Angka pertumbuhan R

$$\boldsymbol{R = b - d} \tag{32.3}$$

Adalah angka kelahiran dikurangi kematian. Dalam beberapa tahun terakhir, angka pertumbuhan penduduk manusia di dunia sama dengan ,019. Ini berarti bahwa angka pertumbuhan (angka kelahiran dikurangi angka kematian) adalah 1,9 persen per tahun.. Angka ini tidak memberi informasi lain mengenai kelahiran dan angka kematian.

Semenjak kita memfokus perhatian kita pada total penduduk di suatu wilayah. Angka kelahiran dan kematian adalah rata-rata, ini rata-rata seluruh penduduk. Kami tidak membedakan antara individu yang lebih tua atau lebih muda. Dalam membahas pertumbuhan penduduk manusia, aktuaris dan demographer akan marah dengan pendekatan kami. Mereka sadar bahwa prediksi akurat pertumbuhan di masa depan tergantung pada sebuah pengetahuan dari distribusi umur penduduk. Dua penduduk yang akan tumbuh cukup berbeda jika seseorang memiliki warga senior secara signifikan lebih dari yang lain. Sehingga model matematika kami kembangkan dapat diangkakan untuk memperbolehkan distribusi umur dalam penduduk. Ini akan dibahas secara singkat pada bagian selanjutnya (bagian 35). Kita sekarang melanjutkan untuk membahas total penduduk suatu spesies, dengan asumsi pengaruh dari distribusi kemungkinan perubahan usia dapat diabaikan.

Sebagai langkah pertama dalam pemodelan yang berhubungan dengan matematika dari pertumbuhan penduduk, kita asumsikan bahwa jumlah kelahiran dan jumlah kematian hanya sebanding dengan jumlah penduduk. Sehingga angka pertumbuhan Rkonstan, $R = R_0$; diasumsikan tidak ada perubahan waktu. Sebuah peningkatan dua kali lipat dalam penduduk menghasilkan dua kali lebih banyak kelahiran dan kematian. Tanpa membantah asumsi, marilah kita mengejar konsekuensinya. Jika angka pertumbuhan konstan maka untuk setiap t

$$\boldsymbol{N(t+\Delta t) - N(t) = R_0 \Delta t N(t)}$$

Hal ini dapat dinyatakan sebagai sebuah perbedaan persamaan bagi penduduk.

$$\boldsymbol{N(t+\Delta t) = (1 + R_0 \Delta t) N(t)} \qquad (32.4)$$

Penduduk pada saat ituΔt nanti adalah persentase tetap dari penduduk sebelumnya. Kami akan menunjukkan perbedaan persamaan dapat diselesaikan sebagai masalah nilai awal, yang diberikan penduduk awal pada $t = t_0$

$$\boxed{\boldsymbol{N(t_0) = N_0}}$$

Penduduk masa depan dapat dengan mudah dihitung.

Sebuah perbedaan persamaan mempunyai arti sama dengan persamaan diferensial. Namun, untuk masalah nilai awal dari jenis perbedaan persamaan, solusi unik selalu dapat langsung dihitung. Tidak ada trik persamaan diferensial yang diperlukan. Untuk angka kelahiran konstan,

$$\boldsymbol{N(t_0 + \Delta t) = (1 + R_0\Delta t)N_0}$$
$$\boldsymbol{N(t_0 + 2\Delta t) = (1 + R_0\Delta t)N(t_0 + \Delta t) = (1 + R_0\Delta t)^2 N_0}$$
$$\boldsymbol{N(t_0 + 3\Delta t) = (1 + R_0\Delta t)N(t_0 + 2\Delta t) = (1 + R_0\Delta t)^3 N_0}$$

meskipun metode ini memberikan jawaban yang memuaskan untuk setiap saat. Jelas bahwa rumus umum

$$\boldsymbol{N(t) = N(t_0 + m\Delta t) = (1 + R_0\Delta t)^m N_0}$$

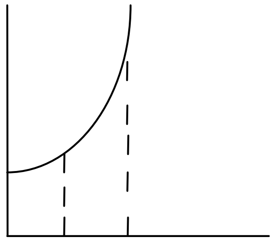
Atau ekuivalen

$$\boldsymbol{N(t) = (1 + R_0\Delta t)^{t - t_0/\Delta t} N_0}$$

Jika angka kelahiran lebih besar dari angka kematian (i.e., jika $R_0 > 0$), pertumbuhan penduduk. Sebuah sketsa solusi ini mudah dilakukan dengan mencatat.

$$\boldsymbol{(1 + R_0\Delta t)^m = e^{am}}$$

Di mana a adalah konstans, $a = \ln(1 + R_0\Delta t)$. Sehingga, jika $R_0 > 0$ kita memiliki gambar 32-2. Pertumbuhan terjadi diskrit lain selama interval waktu yang panjangΔt. Di setiap interval waktu Δt kenaikan penduduk dengan angka yang sama. Tapi bukan dengan jumlah yang sama, tetapi sebuah peningkatan jumlah. Sekitar 1800, ekonom Inggris, Malthus menggunakan jenis model pertumbuhan penduduk untuk membuat prediksi pesimistis bahwa penduduk manusia akan sering mengatasi pasokan makanan. Malthus tidak meramalkan pencapaian teknologi yang luas dalam produksi makanan.



Gambar 32-2 angka pertumbuhan konstan

Asumsi bahwa angka pertumbuhan konstan sering tidak diamati penduduk perkiraan. Kami menggambarkan beberapa faktor lingkungan yang menyebabkan angka pertumbuhan manusia bervariasi.

1. Kegagalan panen kentang (karena penyakit) di Irlandia pada tahun 1845 mengakibatkan kelaparan yang meluas. Tidak hanya angka kematian secara dramatis meningkat, tetapi imigrasi pada United States (dan di tempat lain) begitu besar bahwa selama beberapa tahun berikutnya penduduk dari Irlandia menurun secara signifikan. Perkiraan penduduk untuk Irlandia berbicara sendiri:

Perkiraan Penduduk Irlandia

tahun	jumlah penduduk dalam jutaan
1800	4.5
1845	8.5
1851	6.5
1891	6.7
1951	4.3
1971	4.5

2. Sebuah pemadaman listrik terkenal pada tahun 1965 di timur laut Negara Serikat menghasilkan angka pertumbuhan yang meningkat sembilan bulan kemudian. Efek ini juga terjadi, Misalnya, sebagai hasil dari jam malam hukum chili tahun 1973.
3. Pil dan tindakan kontrol lahir lainnya telah memberi kontribusi penurunan di tahun 1960 dan 1970 dalam angka pertumbuhan di Amerika Serikat.
4. Rata-rata jumlah anak yang diinginkan tampaknya tergantung pada faktor ekonomi dan lainnya. Selama masa depresi di tahun 1930, angka kelahiran di Amerika Serikat lebih rendah dari mereka baik sebelum dan sesudah.

Contoh (2) - (4) jelas menggambarkan perbedaan antara kesuburan (kemampuan untuk mereproduksi, kemampuan reproduksi) dan fekunditas (angka aktual reproduksi).

DAFTAR PUSTAKA

Shepley, L., Ross. 1984. *Differential Equations, third edition*. John wiley & Sons.

Paul, W, Davis.1999. *Differential Equations Modelling with Matlab*. Prentice Hall.

Darmawijoyo.2002. *Persamaan Diferensial Biasa Suatu Pengantar*. Jakarta: Erlangga

Boyce, WE., DiPrima, R.C.2004. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley: New York.

Lina, A., dkk. 2003. *Handout Persamaan Diferensial Elementer*. FMIPA UGM

Ross, S.L. 1998. *Introduction to Differential Equations*. Wiley: New York.

Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Waluyo, S.B.2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta : Graha Ilmu