



PENGANTAR ANALISIS REAL

Naela Faza Fariha & Nanang Khuzaini

PENGANTAR ANALISIS REAL

Naela Faza Fariha
Nanang Khuzaini

PENGANTAR ANALISIS REAL

Disusun oleh:

Naela Faza Fariha

Nanang Khuzaini

2025

Kata Pengantar

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas rahmat dan karunia-Nya, modul ini dapat tersusun dengan baik. Modul ini disusun untuk membantu mahasiswa dalam memahami konsep-konsep dasar Analisis Real, khususnya topik barisan dan keterkaitannya dengan analisis matematika.

Penulis menyadari bahwa modul ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan demi penyempurnaan modul ini di masa mendatang.

Yogyakarta, 2025

Penulis

Daftar Simbol

$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
$\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Q}$	Himpunan bilangan rasional
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real
$\in$	Anggota dari himpunan
$\subseteq$	Himpunan bagian
(x_n)	Barisan $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
X	Barisan bilangan x
(a, b)	Interval terbuka dari a sampai b
$[a, b]$	Interval tertutup dari a sampai b

Daftar Isi

Kata Pengantar	i
Daftar Simbol	ii
0 Pendahuluan	1
1. Himpunan dan Fungsi	1
2. Sifat Tertutup dan Tidak Tertutup terhadap Operasi	3
3. Konstruksi Bilangan Real	4
4. Prinsip Induksi Matematika	5
Latihan	6
1 Sifat Aljabar Himpunan Bilangan Real	8
1. Sifat Aljabar Bilangan Real	8
2. Bilangan Irrasional	14
Latihan	16
2 Sifat Urutan Bilangan Real	17
1. Definisi	17
2. Ketaksamaan Penting	24
3. Nilai Mutlak dan Jarak	27
4. Garis Bilangan Real	36
Latihan	36
3 Sifat Kelengkapan Bilangan Real	37
1. Supremum dan Infimum	37
2. Sifat Kelengkapan Bilangan Real $\mathbb{R}$	44
3. Interval dalam $\mathbb{R}$	46
Latihan	47
4 Barisan Bilangan Real	48
1. Barisan Bilangan Real	48
2. Limit Barisan	50
3. Barisan Monoton	63
4. Barisan Bagian (<i>Subsequence</i>)	65
Latihan	69

BAB 0

Pendahuluan

Pada bagian ini disajikan uraian singkat mengenai terminologi dan notasi yang akan digunakan dalam modul ini. Bagian ini dimaksudkan untuk memberikan pemahaman awal sehingga pembaca memiliki acuan yang jelas terhadap istilah maupun simbol yang muncul pada pembahasan selanjutnya. Disarankan agar pembaca menelaah bagian ini terlebih dahulu secara menyeluruh, dan apabila diperlukan, dapat merujuk kembali untuk mengingat kembali definisi maupun makna dari suatu istilah atau notasi tertentu.

1. Himpunan dan Fungsi

Misal diberikan A adalah suatu himpunan, maka suatu elemen x merupakan elemen dari himpunan A dapat dituliskan sebagai

$$x \in A$$

dan dikatakan bahwa x suatu **elemen** A , atau x adalah **anggota** dari A , atau x **termuat** dalam A . Jika x *tidak* berada dalam A , dituliskan

$$x \notin A.$$

Jika setiap elemen dari suatu himpunan A juga termasuk dalam suatu himpunan B , maka dikatakan bahwa A adalah **himpunan bagian** dari B dan dituliskan

$$A \subseteq B \quad \text{atau} \quad B \supseteq A.$$

Suatu himpunan A adalah **himpunan bagian sejati** dari suatu himpunan B jika $A \subseteq B$, tetapi terdapat setidaknya satu elemen dari B yang tidak ada dalam A . Dalam hal ini kadang dituliskan

$$A \subset B.$$

Definisi 0.1. Dua himpunan A dan B dikatakan **sama**, dan dituliskan $A = B$, jika keduanya memiliki elemen yang sama.

Dengan demikian, untuk membuktikan bahwa himpunan A dan B sama, harus dapat ditunjukkan bahwa

$$A \subseteq B \quad \text{dan} \quad B \subseteq A.$$

Suatu himpunan dapat didefinisikan dengan dua cara, yaitu dengan menuliskan langsung elemen-elemennya, atau dengan memberikan suatu sifat yang menentukan keanggotaannya. Untuk menuliskan himpunan dengan sifat keanggotaan dituliskan sebagai

$$\{x \in S : P(x)\}$$

dibaca sebagai x merupakan anggota himpunan S yang memenuhi sifat P .

Contoh.

1. Himpunan $\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ menyatakan himpunan bilangan asli yang memenuhi sifat $x^2 - 3x + 2 = 0$. Karena yang memenuhi sifat (persamaan) tersebut adalah $x = 1$ dan $x = 2$, maka himpunan tersebut juga dapat dituliskan dengan menuliskan elemennya yaitu $\{1, 2\}$.
2. Bilangan asli n dikatakan **genap** jika dapat dinyatakan sebagai $n = 2k$ dengan $k \in \mathbb{N}$. Maka himpunan bilangan genap dapat ditulis sebagai

$$\{2k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Secara serupa, himpunan bilangan **ganjil** dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\{2k - 1 : k \in \mathbb{N}\}.$$

□

Definisi 0.2. Diberikan dua himpunan A dan B , maka

1. Gabungan (**union**) himpunan A dan B dituliskan sebagai $A \cup B$ adalah himpunan yang elemennya merupakan elemen himpunan A atau elemen himpunan B atau keduanya. Lebih lanjut dituliskan

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ atau } x \in B\}.$$

2. Irisan (**intersection**) himpunan A dan B dituliskan sebagai $A \cap B$ adalah himpunan yang elemennya merupakan elemen himpunan A sekaligus elemen himpunan B . Lebih lanjut dituliskan

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ dan } x \in B\}.$$

Himpunan yang tidak memiliki elemen disebut **himpunan kosong** dan dituliskan sebagai $\emptyset$ atau $\{\}$. Jika dua himpunan A dan B tidak memiliki elemen yang sama, dikatakan himpunan A dan B **saling asing** dan dituliskan $A \cap B = \emptyset$.

Definisi 0.3. Diberikan himpunan tak kosong A dan B , maka hasil kali kartesius (Cartesian product) dari A dan B adalah himpunan pasangan berurutan (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$ dan disimbolkan

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

Misal diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 5\}$, maka

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 5), (2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5)\}.$$

Pada bagian ini akan dijabarkan mengenai fungsi dan sifat-sifatnya.

Definisi 0.4. Diberikan himpunan A dan B , maka fungsi dari A ke B adalah himpunan f yang terdiri dari pasangan berurutan $A \times B$ sehingga masing-masing elemen $a \in A$ memiliki tepat satu pasangan $b \in B$ dengan $(a, b) \in f$.

Himpunan A disebut **domain** (daerah asal), himpunan B disebut **codomain** (daerah lawan) dan himpunan B yang menjadi pasangan A disebut **range** (daerah hasil).

2. Sifat Tertutup dan Tidak Tertutup terhadap Operasi

Dalam himpunan bilangan, suatu operasi biner dikatakan **tertutup** pada himpunan tersebut jika hasil operasi dua elemen dari himpunan tersebut selalu menghasilkan elemen yang masih berada dalam himpunan yang sama. Sebaliknya, jika ada hasil operasi yang keluar dari himpunan, maka himpunan tersebut dikatakan **tidak tertutup** terhadap operasi tersebut.

Definisi 0.5. Misalkan S adalah suatu himpunan dan $*$ adalah operasi biner pada S . Himpunan S dikatakan **tertutup** terhadap operasi $*$ jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku

$$a * b \in S.$$

Sebaliknya, jika terdapat $a, b \in S$ sehingga $a * b \notin S$, maka S dikatakan **tidak tertutup** terhadap operasi $*$.

Contoh.

1. Himpunan bilangan asli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
 - Tertutup terhadap penjumlahan, sebab $a + b \in \mathbb{N}$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$.
 - Tidak tertutup terhadap pengurangan, karena misalnya $2 - 5 = -3 \notin \mathbb{N}$.

2. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$
 - Tertutup terhadap penjumlahan, pengurangan, dan perkalian.
 - Tidak tertutup terhadap pembagian, sebab misalnya $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
3. Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$
 - Tertutup terhadap penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian (selama penyebut $\neq 0$).
 - Namun, tidak semua akar bilangan rasional tetap berada di $\mathbb{Q}$, contohnya $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

□

3. Konstruksi Bilangan Real

Pada bagian hanya akan dibahas mengenai konstruksi (asal muasal) himpunan bilangan real, dimulai dari himpunan bilangan yang menjadi dasarnya. Mengenai sifat-sifat bilangan Real akan dibahas pada BAB selanjutnya.

1. $\mathbb{N}$ (Bilangan Asli dan Bilangan Cacah)

Himpunan bilangan asli didefinisikan sebagai

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Sementara itu, jika dimulai dari 0, himpunan tersebut disebut sebagai bilangan cacah

$$\{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Pada himpunan $\mathbb{N}$ berlaku operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\cdot$) yang bersifat tertutup, namun tidak tertutup terhadap operasi pengurangan dan pembagian.

2. $\mathbb{Z}$ (Bilangan Bulat)

Himpunan bilangan bulat didefinisikan sebagai

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Himpunan $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian, tetapi tidak tertutup terhadap pembagian.

3. $\mathbb{Q}$ (Bilangan Rasional)

Himpunan bilangan rasional didefinisikan sebagai

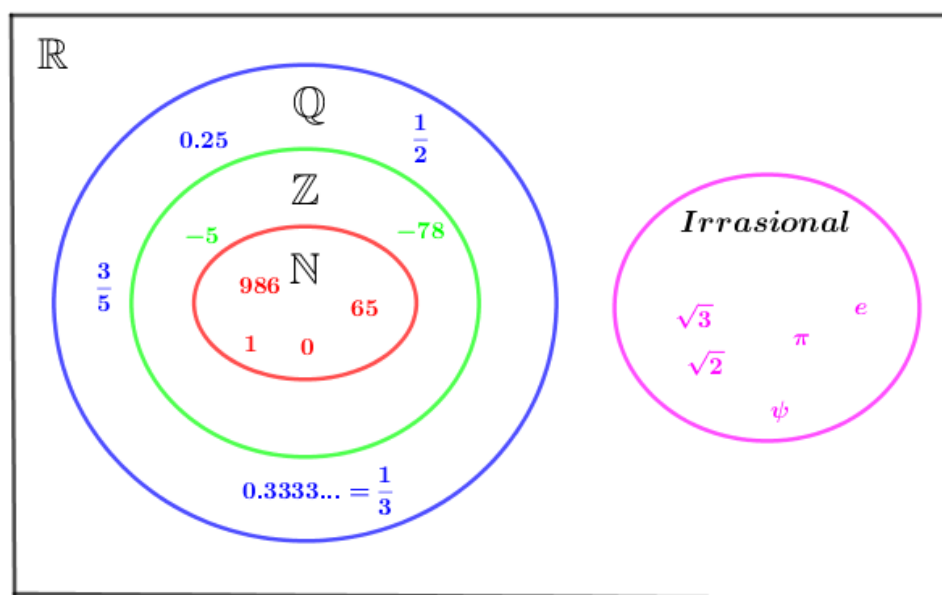
$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Setiap bilangan rasional dapat dituliskan dalam bentuk pecahan, bilangan bulat, maupun desimal. Dua bilangan rasional $\frac{p}{q}$ dan $\frac{a}{b}$ dikatakan sama jika dan hanya jika $pb = qa$. Dengan demikian, bilangan $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots$ merupakan representasi dari bilangan rasional yang sama.

4. $\mathbb{I}$ (Bilangan Irrasional)

Bilangan irrasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$ dengan $p, q \in \mathbb{Z}$ dan $q \neq 0$. Contoh bilangan irrasional adalah $\sqrt{2}$, π , dan e .

Dengan demikian, himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ didefinisikan sebagai gabungan dari himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ dan bilangan irrasional $\mathbb{I}$.



Gambar 0.1: Diagram klasifikasi bilangan real

4. Prinsip Induksi Matematika

Induksi Matematika adalah suatu metode pembuktian untuk menunjukkan bahwa suatu pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap bilangan asli $n \in \mathbb{N}$.

Definisi 0.6. Diberikan suatu pernyataan $P(n)$ yang bergantung pada bilangan asli n . Prinsip induksi matematika menyatakan bahwa $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$ apabila terpenuhi dua langkah berikut:

1. **Langkah Basis:** Menunjukkan bahwa $P(1)$ benar.
2. **Langkah Induksi:** Misalkan $P(k)$ benar untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ (hipotesis induksi). Kemudian ditunjukkan bahwa $P(k+1)$ juga benar.

Jika kedua langkah di atas dipenuhi, maka $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Contoh. Buktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bukti:

1. **Langkah Basis:** Untuk $n = 1$ diperoleh

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1,$$

sehingga $P(1)$ benar.

2. **Langkah Induksi:** Misalkan $P(k)$ benar, yaitu

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Akan ditunjukkan $P(k+1)$ benar, yaitu

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Dengan hipotesis induksi,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1).$$

Sederhanakan ruas kanan:

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Dengan demikian $P(k+1)$ benar.

Berdasarkan prinsip induksi matematika, pernyataan $P(n)$ benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Latihan

1. Buktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

2. Buktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

3. Buktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku:

$$3 + 11 + \cdots + (8n - 5) = 4n^2 - n.$$

4. Buktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku:

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}.$$

5. Buktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = \frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2}.$$

BAB 1

Sifat Aljabar Himpunan Bilangan Real

Bilangan real $\mathbb{R}$ dipandang sebagai suatu sistem bilangan yang memiliki sifat-sifat aljabar, keterurutan, serta kelengkapan. Sebagai suatu **lapangan** (*field*), pada himpunan $\mathbb{R}$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan (+) dan perkalian ($\cdot$) berlaku sifat-sifat aljabar lapangan, seperti sifat komutatif, asosiatif, distributif, keberadaan elemen identitas, dan keberadaan invers.

Sebagai suatu **sistem terurut**, pada $\mathbb{R}$ dapat didefinisikan konsep kepositifan bilangan dan relasi ketidaksamaan antar bilangan real. Selanjutnya, sifat **kelengkapan** dari $\mathbb{R}$ berkaitan dengan konsep *supremum* atau *least upper bound* (batas atas terkecil). Banyak teorema dasar dalam kalkulus elementer, seperti Teorema Eksistensi Titik Maksimum dan Minimum, Teorema Nilai Tengah, Teorema Rolle, serta Teorema Nilai Rata-Rata, bergantung pada sifat kelengkapan ini. Dengan demikian, sifat kelengkapan bilangan real memiliki peran yang sangat penting dalam analisis real.

1. Sifat Aljabar Bilangan Real

Aksioma 1.1. *Sifat Aljabar dari $\mathbb{R}$*

Pada himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ yang dilengkapi operasi penjumlahan (+) dan operasi perkalian ($\cdot$) berlaku sifat-sifat:

Terhadap operasi penjumlahan

T1. $a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$

T2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$

T3. Terdapat elemen $0 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $0 + a = a + 0 = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$

T4. Terdapat elemen $-a \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $(-a) + a = a + (-a) = 0$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$

Terhadap operasi perkalian

K1. $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$

K2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$

K3. Terdapat elemen $1 \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$

K4. Terdapat elemen $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $(\frac{1}{a}) \cdot a = a \cdot (\frac{1}{a}) = 1$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Sifat distributif

D. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$

Empat sifat pertama berhubungan dengan operasi penjumlahan, empat sifat berikutnya berkaitan dengan perkalian, dan satu sifat terakhir menghubungkan kedua operasi tersebut.

Sifat T1 dan K1 menyatakan **sifat komutatif**, sedangkan sifat T2 dan K2 menyatakan **sifat asosiatif**. Sifat T3 dan K3 menjamin adanya **elemen identitas**, dan sifat T4 serta K4 menjamin adanya **elemen invers**, masing-masing terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Terakhir, sifat D menunjukkan **sifat distributif** perkalian terhadap penjumlahan. Dengan dipenuhinya sifat-sifat T1–T4, K1–K4, dan D oleh seluruh elemen bilangan real $\mathbb{R}$, maka $\mathbb{R}$ dapat dipandang sebagai suatu lapangan.

Berkenaan dengan elemen identitas 0 (untuk operasi penjumlahan) dan 1 (untuk operasi perkalian), diketahui bahwa keduanya bersifat unik atau tunggal. Selain itu, setiap elemen dalam R apabila dikalikan dengan 0 akan selalu menghasilkan 0. Hal tersebut tertulis dalam teorema berikut.

Teorema 1.2. (i) Jika $z, a \in \mathbb{R}$ dan $z + a = a$, maka $z = 0$.

(ii) Jika $u, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ dengan $u \cdot b = b$, maka $u = 1$.

(iii) Jika $a \in \mathbb{R}$, maka $a \cdot 0 = 0$.

Bukti. Agar memudahkan dalam pembuktian suatu teorema, kalimat yang akan dibuktikan dapat diubah terlebih dahulu menjadi kalimat implikasi $p \rightarrow q$.

(i) Kalimat teorema tersebut jika dipisahkan antara p sebagai diketahui dan q sebagai tujuan akhir atau ditanya, diperoleh

$p := z, a \in \mathbb{R} \text{ dan } z + a = a$

$q := z = 0$

Bukti

$$z = z + 0 \quad (\text{T3})$$

$$= z + (a + (-a)) \quad (\text{T4})$$

$$= (z + a) + (-a) \quad (\text{T2})$$

$$= a + (-a) \quad (\text{T4})$$

$$= 0$$

Terbukti $z = 0$.

(ii) Akan dipisahkan dahulu kalimat p dan q .

$$p := u, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \text{ dan } u \cdot b = b$$

$$q := u = 1$$

Bukti

$$u = u \cdot 1 \quad (\text{K3})$$

$$= u \cdot (b \cdot (1/b)) \quad (\text{K4})$$

$$= (u \cdot b) \cdot (1/b) \quad (\text{K2})$$

$$= b \cdot (1/b) \quad (\text{K4})$$

$$= 1$$

Terbukti $u = 1$.

(iii) $p := a \in \mathbb{R}$

$$q := a \cdot 0 = 0$$

Bukti

$$a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 \quad (\text{K3})$$

$$= a \cdot (1 + 0) \quad (\text{K4})$$

$$= a \cdot 1 \quad (\text{T3})$$

$$a + a \cdot 0 = a \text{ (Persamaan 1)}$$

Berdasarkan sifat T3, dipunyai

$$a + 0 = a \text{ (Persamaan 2)}$$

Berdasarkan Persamaan 1 dan 2 dapat disimpulkan bahwa $a \cdot 0 = 0$.

■

Pada bagian berikut akan dibahas dua sifat mendasar dari perkalian, yaitu sifat unik dari bilangan kebalikan serta prinsip bahwa perkalian dua bilangan menghasilkan nol apabila salah satu di antara faktornya (nilainya) bernilai nol.

Teorema 1.3. (i) Jika $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a + b = 0$, maka $b = -a$.

(ii) Jika $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ dan $a \cdot b = 1$, maka $b = \frac{1}{a}$.

Bukti.

(i) Misalkan $a + b = 0$. Tambahkan $-a$ pada kedua ruas:

$$\begin{aligned}
a + b &= 0 && \text{(Diketahui)} \\
(-a) + (a + b) &= (-a) + 0 && \text{(T3)} \\
((-a) + a) + b &= -a && \text{(T2, T4)} \\
0 + b &= -a && \text{(T4)} \\
b &= -a && \text{(T1)}
\end{aligned}$$

Terbukti $b = -a$.

(ii) Misalkan $a \cdot b = 1$ dan $a \neq 0$. Kalikan dengan $a^{-1} = \frac{1}{a}$:

$$\begin{aligned}
a \cdot b &= 1 && \text{(Diketahui)} \\
a^{-1} \cdot (a \cdot b) &= a^{-1} \cdot 1 && \text{(K3)} \\
(a^{-1} \cdot a) \cdot b &= a^{-1} && \text{(K2)} \\
1 \cdot b &= a^{-1} && \text{(K4)} \\
b &= a^{-1} = \frac{1}{a} && \text{(K1)}
\end{aligned}$$

Terbukti $b = \frac{1}{a}$.

■

Berikut diberikan sifat lain dalam bilangan real

Teorema 1.4. *Jika $a \in \mathbb{R}$, maka berlaku*

- (i) $(-1)a = -a$,
- (ii) $-(-a) = a$,
- (iii) $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Bukti.

(i) Diketahui $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(-1) \cdot a + a &= (-1) \cdot a + 1 \cdot a && \text{(K3)} \\
&= a(-1 + 1) && \text{(D)} \\
&= a \cdot 0 && \text{(T4)} \\
(-1) \cdot a + a &= 0 \text{ (Pers. 1)} && \text{(Teorema 1.2)}
\end{aligned}$$

Berdasarkan sifat T4 diperoleh

$$-a + a = 0 \text{ (Pers. 2)}$$

Berdasarkan Pers. 1 dan 2 diperoleh

$$(-1) \cdot a = -a$$

Terbukti $(-1) \cdot a = -a$.

(ii) Diketahui $a \in \mathbb{R}$

Berdasarkan sifat T4, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku

$$a + (-a) = 0 \quad (T4)$$

$$-a + a = 0 \text{ (Pers.3)} \quad (T1)$$

Berdasarkan sifat T4, untuk setiap $-a \in \mathbb{R}$ berlaku

$$-a + (-a) = 0 \text{ (Pers. 4)}$$

Dari Pers. 3 dan 4 diperoleh

$$a = -(-a) \text{ (Terbukti)}$$

(iii) Sebagai latihan.



Teorema 1.5. Misalkan $a, b, c \in \mathbb{R}$:

(i) Jika $a \neq 0$, maka $\frac{1}{a} \neq 0$ dan $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$

(ii) Jika $a \cdot b = a \cdot c$ dan $a \neq 0$, maka $b = c$

(iii) Jika $a \cdot b = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$

Bukti.

(i) Akan digunakan metode kontradiksi (pembuktian tidak langsung)

- Akan dibuktikan jika $a \neq 0$, maka $\frac{1}{a} \neq 0$

Misalkan $a \neq 0$, berdasarkan sifat K4 terdapat $\frac{1}{a}$ dan berlaku $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (Pers. 1)

Andaikan $\frac{1}{a} = 0$ benar, maka

$$a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot 0 \quad (\text{Diketahui})$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 0 \quad (\text{Pers. 2}) \quad (\text{Teorema 1.2})$$

Terjadi kontradiksi pernyataan Pers. 1 dan Pers. 2, maka haruslah $\frac{1}{a} \neq 0$

- Akan dibuktikan jika $a \neq 0$, maka $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$

Diketahui bahwa $a \in \mathbb{R}$ dan $\frac{1}{a} \neq 0$

Berdasarkan sifat K4, karena $a \neq 0$ maka terdapat $\frac{1}{a}$ sehingga berlaku

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{\frac{1}{a}} \cdot a \quad (\text{Pers. 3})$$

Dari sifat K4 juga, karena $\frac{1}{a} \neq 0$, maka terdapat $\frac{1}{\frac{1}{a}}$ sehingga berlaku

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a}} = 1 \quad (\text{Pers. 4})$$

Berdasarkan Pers. 3 dan 4 diperoleh $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$ (Terbukti).

(ii) Sebagai latihan.

(iii) Sebagai latihan.



Berdasarkan Teorema dan sifat yang telah dibahas, muncul operasi baru yaitu

- Pengurangan $(-)$, didefinisikan sebagai

$$a - b := a + (-b).$$

- Pembagian $(: \text{ atau } \div)$, didefinisikan sebagai

$$a : b = \frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}.$$

Selain itu, muncul juga notasi yang menyingkat perkalian bilangan yang sama beberapa

kali, yang kita kenal sebagai notasi pangkat. Beberapa sifat perpangkatan adalah

$$\begin{aligned}
 a \cdot b &= ab \\
 a^2 &= a \cdot a \\
 a^3 &= a^2 \cdot a \\
 &= a \cdot a \cdot a \\
 a^{n+1} &= a^n \cdot a, \forall n \in \mathbb{N} \\
 a^1 &= a \\
 a^0 &= 1 \\
 a^{-1} &= \frac{1}{a}
 \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai teorema yang sering digunakan dalam perhitungan dasar matematika, yaitu perkalian negatif.

Teorema 1.6. *Jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka*

$$(i) \ a(-b) = -(ab) = (-a)b,$$

$$(ii) \ (-a)(-b) = ab.$$

Bukti.

(i) Diketahui $a, b \in \mathbb{R}$

Berdasarkan sifat T4, terdapat $-(ab)$ sehingga berlaku

$$\begin{aligned}
 -(ab) + (ab) &= 0 \text{ (Pers. 1)} \\
 ab + a(-b) &= a(b + (-b)) && (D) \\
 &= a \cdot 0 && (T4) \\
 ab + a(-b) &= 0 \text{ (Pers. 2)} && (\text{Persamaan 1.2})
 \end{aligned}$$

Berdasarkan Pers 1 dan 2 didapatkan $-(ab) = a(-b)$ (Terbukti).

(ii) Sebagai latihan.

■

2. Bilangan Irrasional

Telah diketahui bahwa himpunan $\mathbb{N}$ dan $\mathbb{Z}$ adalah subset dari $\mathbb{R}$. Elemen $\mathbb{R}$ yang dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{p}{q}$ dengan $p, q \in \mathbb{Z}$ dan $q \neq 0$ disebut **bilangan rasional**

(*rational numbers*). Lebih lanjut bentuk $\frac{p}{q}$ adalah bentuk paling sederhana, yaitu FPB p dan q adalah 1. Himpunan semua bilangan rasional di $\mathbb{R}$ dinotasikan dengan $\mathbb{Q}$. Dapat ditunjukkan bahwa penjumlahan dan perkalian dua bilangan rasional adalah bilangan rasional.

Tapi tidak semua elemen $\mathbb{R}$ merupakan $\mathbb{Q}$, seperti $\sqrt{2}$ yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$. Elemen $\mathbb{R}$ yang bukan $\mathbb{Q}$ disebut **bilangan irrasional** (*irrational numbers*), disimbolkan $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Akan ditunjukkan bahwa tidak terdapat bilangan rasional yang kuadratnya adalah 2. Untuk membuktikannya digunakan istilah genap dan ganjil.

- Suatu bilangan asli disebut **genap** jika bilangan itu mempunyai bentuk $2m$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$,
- Suatu bilangan asli disebut **ganjil** jika bilangan itu mempunyai bentuk $2m - 1$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.7. *Tidak ada elemen $r \in \mathbb{Q}$ sehingga $r^2 = 2$.*

Bukti. Akan dibuktikan secara tidak langsung dengan metode kontradiksi.

Andaikan ada $r \in \mathbb{Q}$ sehingga $r^2 = 2$. Karena $r \in \mathbb{Q}$ maka r dapat dituliskan sebagai $\frac{p}{q}$ dengan FPB p dan q adalah 1, sehingga diperoleh

$$r^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \text{ atau } p^2 = 2q^2. \quad (\text{i})$$

Karena $2q^2$ genap, maka p^2 genap. Akibatnya p juga genap (karena jika p ganjil, maka $p = 2m - 1$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$ atau $p^2 = (2m - 1)^2 = 4m^2 - 4m + 1 = 2(2m^2 - 2m) + 1$ yang berarti p^2 ganjil, jadi p haruslah genap).

Karena p genap, maka dapat dituliskan sebagai $p = 2k$ dengan $k \in \mathbb{N}$, sehingga

$$p^2 = (2k)^2 = 4k^2. \quad (\text{ii})$$

Di lain pihak diketahui $p^2 = 2q^2$ dan p genap, akibatnya q ganjil (karena jika q genap, maka FPB p dan q bukan 1, jadi q haruslah ganjil). Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} p^2 &= 2q^2 \text{ (persamaan (i))} \\ \iff 4k^2 &= 2q^2 \text{ (persamaan (i))} \\ \iff 2k^2 &= q^2 \text{ (kedua ruas dikali } \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

yang berarti q genap. Terjadi kontradiksi pada nilai q . Jadi pengandaian salah dan yang benar adalah tidak ada $r \in \mathbb{Q}$ sehingga $r^2 = 2$. ■

Latihan

1. Selesaikan persamaan-persamaan berikut, dengan memberikan alasan pada setiap langkah berdasarkan sifat atau teorema yang sesuai.
 - a. $2x + 5 = 8$
 - b. $x^2 = 2x$
 - c. $x^2 - 1 = 3$
 - d. $(x - 1)(x + 2) = 0$
2. Buktikan Teorema 1.4 poin (iii).
3. Buktikan Teorema 1.5 poin (ii) dan (iii).
4. Buktikan Teorema 1.6 poin (ii).

BAB 2

Sifat Urutan Bilangan Real

Pada BAB ini akan dibahas mengenai sifat urutan bilangan real, yaitu membahas bahwa bilangan real dapat diurutkan dengan memenuhi sifat-sifat urutan. Sifat urutan menjelaskan tentang kepositifan dan ketaksamaan pada bilangan real.

1. Definisi

Aksioma 2.1. Ada subset tak kosong $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$, yang disebut dengan **himpunan bilangan real positif tegas** yang memenuhi sifat-sifat berikut:

- (i) Jika $a, b \in \mathbb{P}$, maka $a + b \in \mathbb{P}$.
- (ii) Jika $a, b \in \mathbb{P}$, maka $ab \in \mathbb{P}$.
- (iii) Jika $a \in \mathbb{R}$, maka memenuhi tepat satu kondisi berikut

$$a \in \mathbb{P}, \quad a = 0, \quad -a \in \mathbb{P}.$$

Sifat (i) dan (ii) menjelaskan tentang sifat tertutup $\mathbb{P}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Sifat (iii) sering disebut **sifat trikotomi** karena akan membagi $\mathbb{R}$ menjadi tiga jenis elemen yang berbeda. Hal ini menjelaskan bahwa himpunan $\{-a : a \in \mathbb{P}\}$ dari bilangan real negatif tidak mempunyai elemen yang sama dengan himpunan bilangan real positif. Lebih lanjut $\mathbb{R}$ merupakan gabungan tiga himpunan, yaitu

$$\mathbb{R} = \mathbb{P} \cup \{-a : a \in \mathbb{P}\} \cup \{0\}.$$

Definisi 2.2. Diberikan $a \in \mathbb{R}$.

- a. Jika $a \in \mathbb{P}$, ditulis $a > 0$, artinya a adalah bilangan real **positif**.
- b. Jika $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, ditulis $a \geq 0$, artinya a adalah bilangan real **nonnegatif**.
- c. Jika $-a \in \mathbb{P}$, ditulis $a < 0$, artinya a adalah bilangan real **negatif**.
- d. Jika $a \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, ditulis $a \leq 0$, artinya a adalah bilangan real **nonpositif**.

Definisi 2.3. Diberikan $a, b \in \mathbb{R}$.

- a. Jika $a - b \in \mathbb{P}$, maka ditulis $a > b$ atau $b < a$.

b. Jika $a - b \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, maka ditulis $a \geq b$ atau $b \leq a$.

Sifat tirkotomi (iii) berakibat bahwa untuk $a, b \in \mathbb{R}$, maka akan memenuhi salah satu kondisi berikut:

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b.$$

Contoh

- $5 > 3$ benar, karena $5 - 3 = 2 \in \mathbb{P}$,
- $2 \geq 2$ benar, karena $2 - 2 = 0 \in \mathbb{P} \cup \{0\}$,
- $1 > 1$ salah, karena $1 - 1 = 0 \notin \mathbb{P}$,
- $2 \leq 2 < 3$ benar, karena $3 - 2 = 1 \in \mathbb{P}$ dan $2 - 2 = 0 \in \mathbb{P} \cup \{0\}$.

Karena jelasnya relasi urutan pada $\mathbb{R}$, maka $\mathbb{R}$ dapat disajikan dalam bentuk garis bilangan. Garis bilangan adalah garis lurus berupa dua sinar garis yang berpusat di 0. Sinar garis yang mengarah ke kanan bernilai (+), sinar garis yang mengarah ke kiri bernilai (-).

Teorema 2.4. Diberikan $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- (i) Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$.
- (ii) Jika $a > b$, maka $a + c > b + c$.
- (iii) Jika $a > b$ dan $c > 0$, maka $ca > cb$.
- (iv) Jika $a > b$ dan $c < 0$, maka $ca < cb$.

Bukti.

- (i) Diketahui $a > b$ dan $b > c$ dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$. Karena $a > b$, maka $a - b \in \mathbb{P}$. Karena $b > c$, maka $b - c \in \mathbb{P}$. Karena sifat urutan (i), yaitu jika $(a - b) \in \mathbb{P}$ dan $(b - c) \in \mathbb{P}$, maka $(a - b) + (b - c) \in \mathbb{P}$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}(a - b) + (b - c) \in \mathbb{P} &\iff a - b + b - c \in \mathbb{P} \\ &\iff (a - c) + (-b + b) \in \mathbb{P} \\ &\iff (a - c) + 0 \in \mathbb{P} \\ &\iff a - c \in \mathbb{P} \\ &\iff a > c.\end{aligned}$$

(ii) Diketahui $a > b$ artinya $a - b \in \mathbb{P}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 a - b \in \mathbb{P} &\iff a - b + 0 \in \mathbb{P} \\
 &\iff a - b + c - c \in \mathbb{P} \\
 &\iff a + c - b - c \in \mathbb{P} \\
 &\iff (a + c) - (b + c) \in \mathbb{P} \\
 &\iff a + c > b + c.
 \end{aligned}$$

(iii) Diketahui $a > b$ artinya $a - b \in \mathbb{P}$ serta $c \in \mathbb{P}$. Berdasarkan sifat urutan (ii), yaitu jika $a - b \in \mathbb{P}$ dan $c \in \mathbb{P}$, maka $c(a - b) \in \mathbb{P}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 c(a - b) \in \mathbb{P} &\iff ca - cb \in \mathbb{P} \\
 &\iff ca > cb.
 \end{aligned}$$

(iv) Langkah sama dengan poin (iii). ■

Selanjutnya akan dibahas mengenai teorema nilai tengah.

Teorema 2.5. *Jika $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a < b$, maka $a < \frac{a+b}{2} < b$.*

Bukti. Karena $a < b$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 a < b &\iff a + a < a + b \\
 &\iff 2a < a + b \\
 &\iff a < \frac{a+b}{2}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Dilain pihak untuk $a < b$, diperoleh

$$\begin{aligned}
 a < b &\iff a + b < b + b \\
 &\iff a + b < 2b \\
 &\iff \frac{a+b}{2} < b.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Berdasarkan pertaksamaan (1) dan (2) diperoleh

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

■

Secara geometris, $\frac{a+b}{2}$ adalah titik tengah antara a dan b . Akibatnya jika $b > 0$ dan diambil $a = 0$, maka didapat $0 < \frac{1}{2}b < b$.

Berikutnya akan dibahas mengenai sifat-sifat lain terkait bilangan positif dan negatif (sifat urutan bilangan real).

Teorema 2.6. *Diberikan $a \in \mathbb{R}$, maka berlaku*

(i) *Jika $a > 0$, maka $-a < 0$.*

(ii) *Jika $a > 0$, maka $\frac{1}{a} > 0$.*

Bukti.

(i) $a > 0 \Rightarrow -a < 0$.

Untuk sebarang $a \in \mathbb{R}$, berdasarkan A_4 maka terdapat $-a \in \mathbb{R}$ sehingga berlaku $a + (-a) = 0$.

Berdasarkan A_3 didapat

$$\begin{aligned} -a &= 0 + (-a) \\ &< a + (-a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Terbukti $-a < 0$.

(ii) $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$.

Akan dibuktikan dengan kontradiksi.

Andaikan $\frac{1}{a} \leq 0$.

Perhatikan bahwa pasti $\frac{1}{a} \neq 0$, karena jika $\frac{1}{a} = 0$ maka $1 = a \cdot \frac{1}{a} = a \times 0 = 0$ terjadi kontradiksi. Maka hanya terisa kemungkinan $\frac{1}{a} < 0$.

Berdasarkan Teorema 1.11 (i), diperoleh $-\frac{1}{a} > 0$.

Karena $a > 0$ dan $-\frac{1}{a} > 0$, maka berdasarkan M_4 diperoleh

$$\begin{aligned} -1 &= a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Terjadi kontradiksi, maka haruslah $\frac{1}{a} > 0$. ■

Sebelum menuju teorema selanjutnya, akan diperkenalkan dulu terkait konsep epsilon (ε)

Dalam analisis real, sering digunakan simbol ε untuk menyatakan sebuah bilangan real positif yang nilainya dianggap sangat kecil. Secara formal, ε hanya berarti suatu bilangan real dengan $\varepsilon > 0$, tanpa batasan khusus selain positif. Lebih jelas perhatikan penjelasan berikut terkait ε .

Definisi Umum

- ε adalah huruf Yunani kecil yang dalam matematika sering digunakan untuk menyatakan **jarak yang sangat kecil** atau **batas toleransi kesalahan**.
- Nilai ε selalu dianggap **positif**, yaitu $\varepsilon > 0$.
- Besarnya dapat dipilih secara bebas: dapat bernilai relatif besar, ataupun sekecil yang dikehendaki.

Peran Epsilon dalam Analisis Real

- Dalam analisis real, konsep ε digunakan untuk menegaskan bahwa suatu bilangan atau fungsi dapat dibuat **sedekat mungkin** dengan suatu titik atau bilangan tertentu.
- Dengan kata lain, seberapa kecil jarak yang ditentukan melalui ε , matematika menjamin bahwa syarat atau kondisi tertentu tetap dapat dipenuhi.

Ilustrasi Sederhana Misalkan diberikan titik pada garis bilangan, yaitu $a = 5$.

- Jika dipilih $\varepsilon = 2$, maka intervalnya adalah:

$$(5 - 2, 5 + 2) = (3, 7).$$

Artinya, kita memperhatikan semua bilangan yang berjarak kurang dari 2 terhadap 5.

- Jika dipilih $\varepsilon = 0.5$, maka intervalnya adalah:

$$(4.5, 5.5).$$

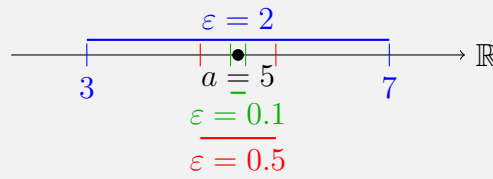
- Jika dipilih $\varepsilon = 0.1$, maka intervalnya adalah:

$$(4.9, 5.1).$$

Semakin kecil ε , semakin **ketat** kedekatan bilangan-bilangan yang diperhatikan terhadap titik $a = 5$.

Konsep Epsilon ε

Visualisasi Interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$



Inti Konsep Epsilon

- ε bukanlah suatu nilai tetap, melainkan simbol umum untuk menyatakan seberapa kecil jarak yang dapat ditentukan.
- Oleh karena itu, setiap kali muncul pernyataan:
“untuk setiap $\varepsilon > 0$, berlaku ...”,
maksudnya adalah:

Apapun batas toleransi yang dipilih (sekecil apapun), kondisi atau pernyataan matematis tersebut tetap berlaku.

Teorema 2.7. Jika $a \in \mathbb{R}$ sehingga $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a = 0$.

Bukti. Akan dibuktikan dengan kontradiksi.

Andaikan $a > 0$, maka berdasarkan teorema sebelumnya diperoleh $a > \frac{a}{2} > 0$.

Diambil $\varepsilon_0 = \frac{a}{2}$ (ε_0 adalah bilangan real positif tegas, yaitu $\varepsilon_0 > 0$), maka $a > \varepsilon_0 > 0$. Terjadi kontradiksi dengan pernyataan $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Jadi pengandaian salah, yang benar adalah $a = 0$. ■

Perkalian antara dua bilangan positif hasilnya positif, tapi belum tentu hasil perkalian yang positif faktornya positif.

Teorema 2.8. Jika $ab > 0$, maka berlaku salah satu dari dua kemungkinan berikut

(i) $a > 0$ dan $b > 0$, atau

(ii) $a < 0$ dan $b < 0$.

Bukti. Mengingat $ab > 0$, maka $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ sebab jika salah satu di antara a atau b bernilai 0 maka $ab = 0$, bertentangan dengan yang diketahui.

Dengan sifat trikotomi maka kemungkinannya adalah $a > 0$ atau $a < 0$.

- Untuk $a > 0$, maka $\frac{1}{a} > 0$ dan

$$\begin{aligned}
 b &= 1 \cdot b \\
 &= \left(\left(\frac{1}{a} \right) a \right) b \\
 &= \left(\frac{1}{a} \right) (ab) \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

- Untuk $a < 0$, maka $-a > 0$ atau $-\frac{1}{a} > 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 \left(-\frac{1}{a} \right) (ab) &> 0 \\
 - \left(\frac{1}{a} \right) (ab) &> 0 \\
 - \left(\frac{1}{a} \cdot a \right) b &> 0 \\
 -1 \cdot b &> 0 \\
 -b &> 0,
 \end{aligned}$$

karena $-b > 0$ maka berdasarkan Teorema 1.11 (i) disimpulkan $b < 0$. ■

Dari Teorema tersebut dapat diturunkan akibat berikut.

Akibat 2.9. *Jika $ab < 0$, maka berlaku salah satu dari dua kemungkinan berikut*

(i) $a < 0$ dan $b > 0$, atau

(ii) $a > 0$ dan $b < 0$.

Bukti. Diserahkan sebagai latihan ■

Teorema 1.13 dan Akibat 1.14 menyatakan bahwa jika hasil kali dua bilangan adalah positif, maka kedua bilangan tersebut bertanda sama (keduanya positif atau keduanya negatif). Sebaliknya, jika hasil kali dua bilangan adalah negatif, maka kedua bilangan tersebut berbeda tanda (satu positif dan lainnya negatif). Sifat ini juga berlaku untuk pembagian. Fakta ini bisa digunakan untuk menyelesaikan pertaksamaan.

Contoh. Tentukan himpunan penyelesaian pertaksamaan $x^2 + x - 2 > 0$.

Penyelesaian

Pertama dilakukan faktorisasi berikut

$$x^2 + x - 2 > 0 = (x + 2)(x - 1) > 0.$$

Diperoleh perkalian dua suku $(x + 2)$ dan $(x - 1)$ bernilai positif, sehingga ada dua kemungkinan yaitu

- $(x + 2) > 0$ dan $(x - 1) > 0$ menghasilkan $x > -2$ dan $x > 1$. Irisannya adalah $x > 1$.
- $(x + 2) < 0$ dan $(x - 1) < 0$ menghasilkan $x < -2$ dan $x < 1$. Irisannya adalah $x < -2$.

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \in \mathbb{R} : x < -2 \text{ atau } x > 1\}$. □

Contoh. Tentukan himpunan penyelesaian pertaksamaan $\frac{2x+1}{x+2} < 1$.

Latihan mandiri. □

2. Ketaksamaan Penting

Berikut diberikan beberapa bentuk ketaksamaan sederhana yang sering digunakan pada pembahasan dan pembuktian.

Teorema 2.10. *Jika $a \geq 0$ dan $b \geq 0$, maka pernyataan berikut ekuivalen*

- (i) $a < b$
- (ii) $a^2 < b^2$
- (iii) $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Bukti. Kalimat teorema tersebut juga dapat ditulis sebagai bentuk biimplikasi

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$

- Untuk $a = 0$ dan $b \geq 0$, diperoleh pernyataan

$$b > 0 \Leftrightarrow b^2 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{b} > 0$$

benar. Mengingat benar bahwa kuadrat bilangan tak nol selalu positif (yaitu $b > 0 \rightarrow b^2 > 0$, berdasarkan sifat urutan) dan akar bilangan positif adalah positif ($\sqrt{b} > 0 \Leftrightarrow b > 0$).

Kita masih perlu menyelidiki kebenaran pernyataan $b^2 > 0 \rightarrow b > 0$.

Karena sudah diketahui $b \geq 0$ maka hanya ada dua kemungkinan, yaitu $b = 0$ atau $b > 0$. Andaikan tidak benar $b > 0$ maka haruslah $b = 0$. Untuk $b = 0$ bernilai benar, maka diperoleh $b^2 = 0$. Untuk $b > 0$ tidak benar, maka diperoleh $b^2 > 0$ tidak benar. Dengan kontraposisi, kebenaran implikasi $b^2 > 0 \rightarrow b > 0$ terbukti.

- Untuk $a > 0$ dan $b > 0$, yaitu $a + b > 0$.

– (i) $\rightarrow$ (ii)

Diketahui $a < b$ atau $a - b < 0$. Diperoleh

$$\begin{aligned}a - b &< 0 \\(a - b)(a + b) &< 0 \cdot (a + b) \\a^2 - b^2 &< 0\end{aligned}$$

artinya $a^2 < b^2$.

– (ii) $\rightarrow$ (i)

Diketahui $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) < 0$. Karena diketahui bahwa $a + b > 0$, maka haruslah $a - b < 0$ atau $a < b$.

– (i) $\Leftrightarrow$ (iii)

Dua poin sebelumnya telah membuktikan bahwa jika $x, y > 0$ maka

$$x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2.$$

Diambil $x = \sqrt{a}$ dan $y = \sqrt{b}$, sehingga jika $\sqrt{a}, \sqrt{b} > 0$, maka

$$\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 < (\sqrt{b})^2.$$

Karena $a = (\sqrt{a})^2$ dan $b = (\sqrt{b})^2$ maka diperoleh

$$\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow a < b.$$

Terbukti bahwa (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

■

Teorema 2.11. (Ketaksamaan Bernoulli) Jika $x > -1$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Bukti. Dibuktikan dengan induksi matematika.

- Akan dibuktikan benar untuk $n = 1$, yaitu

$$(1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$$

lebih tepatnya $1 + x = 1 + x$. Artinya benar untuk $n = 1$.

- Diasumsikan benar untuk $n = k$ yaitu $(1 + x)^k \geq 1 + kx$, akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$.

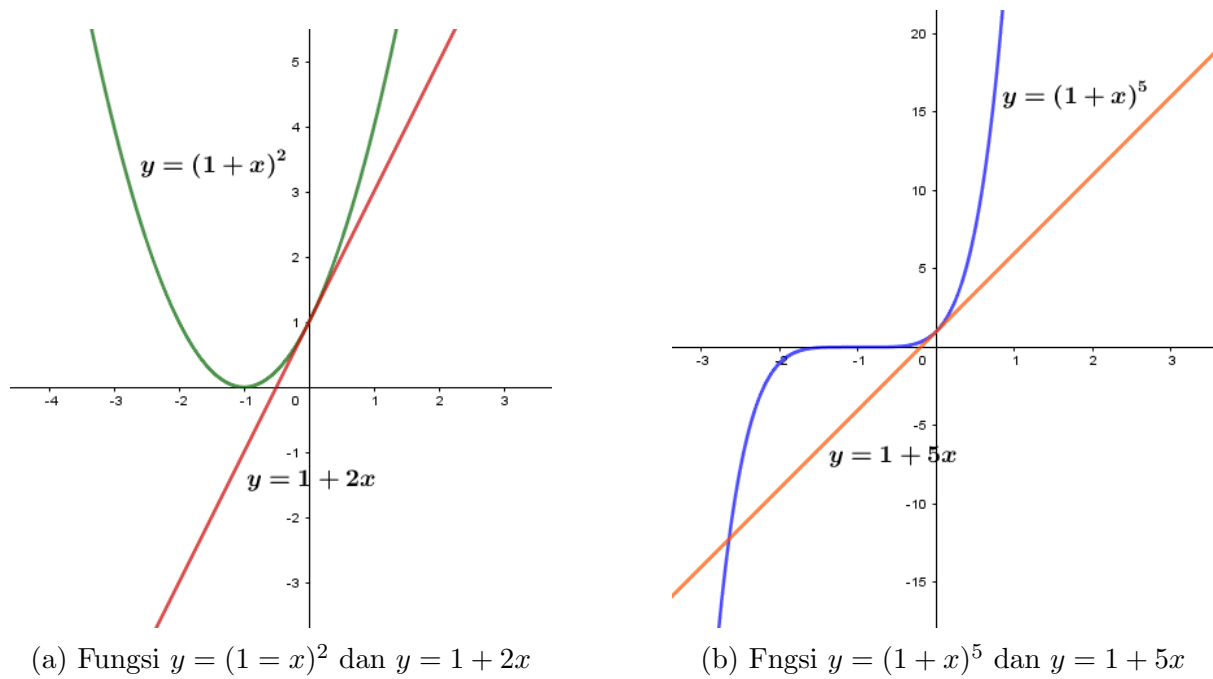
Untuk $n = k + 1$ diperoleh

$$\begin{aligned}
 (1+x)^k &\geq 1+kx \\
 (1+x)^k(1+x) &\geq (1+kx)(1+x) \\
 (1+x)^{k+1} &\geq (1+kx)(1+x) \\
 &= 1+(k+1)x+kx^2 \\
 &\geq 1+(k+1)x.
 \end{aligned}$$

Terbukti benar untuk $n = k + 1$.

Dapat disimpulkan bahwa $(1+x)^n \geq 1+nx$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. ■

Ketaksamaan Bernoulli disebut juga ketaksamaan Binomial.



Gambar 2.1: Ilustrasi Ketaksamaan Bernoulli

Ilustrasi geometris ketaksamaan Bernoulli diberikan pada gambar di atas. Pada gambar (a) dengan $n = 2$, terlihat semua grafik $y = (1+x)^2$ berada di atas grafik $y = 1+2x$. Pada gambar (b) dengan $n = 5$, terlihat tidak semua grafik $y = (1+x)^5$ berada di atas grafik $y = 1+5x$. Namun untuk $x > -2.5$ atau lebih pastinya untuk $x > -1$, semua grafik $y = (1+x)^5$ berada di atas grafik $y = 1+5x$. Jadi persyaratan $x > -1$ pada Teorema 1.16 penting.

Teorema 2.12. (Ketaksamaan Cauchy) Jika $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan $b_1, b_2, \dots, b_n$ adalah bilangan real, maka berlaku

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

atau

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

Bukti. Didefinisikan fungsi $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sebagai berikut

$$F(t) = (a_1 - tb_1)^2 + (a_2 - tb_2)^2 + \dots + (a_n - tb_n)^2, t \in \mathbb{R}.$$

Jelas bahwa $F(t) \geq 0$ karena tersusun dari penjumlahan suku tak negatif. Selanjutnya

$$\begin{aligned} F(t) &= (a_1^2 - 2ta_1b_1 + t^2b_1^2) + (a_2^2 - 2ta_2b_2 + t^2b_2^2) + \dots + (a_n^2 - 2ta_nb_n + t^2b_n^2) \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) - 2t(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) + t^2(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) - 2t \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right) + t^2 \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Ingat bahwa fungsi kuadrat bernilai tak negatif jika dan hanya jika diskriminannya tak positif ($A + 2Bt + Ct^2 \geq 0 \Leftrightarrow D = (2B)^2 - 4CA \leq 0$), akibatnya $B^2 \leq AC$. Sehingga diperoleh

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

■

Contoh. Tulis bentuk khusus pertaksamaan cauchy untuk dua kelompok tunggal $\{a_1\}$ dan $\{b_1\}$ dengan $a_1 = a$ dan $b_1 = b$

Jawab :...

□

3. Nilai Mutlak dan Jarak

Pada sifat urutan kita baru mempelajari ukuran lebih besar antara 2 bilangan, namun belum diketahui kuantitasnya. Contoh $5 > -1$ dan $5 > 2$ adalah 2 pernyataan yang benar, namun belum dibahas mana kuantitas yang lebih besar 5 terhadap -1 atau 5 terhadap 2. Oleh karena itu dipeerlukan pengertian jarak.

Definisi 2.13. Nilai mutlak suatu bilangan real a ditulis dengan $|a|$ didefinisikan sebagai

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{untuk } a > 0 \\ 0, & \text{untuk } a = 0 \\ -a, & \text{untuk } a < 0 \end{cases}$$

Contoh. $|3| = 3$

$|0| = 0$

$$|-2| = -(-2) = 2$$

□

Dengan kata lain nilai mutlak bersifat dikotomi, yaitu nol/positif. Maka def. 2.1 dapat disederhanakan menjadi

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{untuk } a \geq 0 \\ -a, & \text{untuk } a < 0 \end{cases}$$

Berikut diberikan sifat-sifat nilai mutlak

Teorema 2.14. Misal $a, b, c \in \mathbb{R}$, maka berlaku

$$(i) \quad |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$(ii) \quad |-a| = |a|$$

$$(iii) \quad |ab| = |a||b|$$

$$(iv) \quad \text{untuk } c \geq 0 \text{ dan } |a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c$$

$$(v) \quad -|a| \leq a \leq |a|$$

Bukti.

(i) $\leftarrow$ Langsung dari definisi

$\rightarrow$ dengan kontraposisi, yaitu jika $a \neq 0 \rightarrow |a| \neq 0$ (dari definisi) maka implikasi $|a| = 0 \rightarrow a = 0$ benar.

$$(ii) \quad |-a| = |a|$$

- Jika $a = 0$, maka $-0 = 0$ sehingga diperoleh $|a| = |0| = 0 = |-0| = |-a|$
- Jika $a > 0$, maka $-a < 0$ sehingga didapat $|a| = a = -(-a) = |-a|$
- Jika $a < 0$, maka $-a > 0$ sehingga didapat $|-a| = -a = |a|$

$$(iii) \quad |ab| = |a||b|$$

- Jika a atau b bernilai 0, maka kedua ruas bernilai 0, persamaan terpenuhi
- Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $ab > 0$ sehingga $|ab| = ab = |a||b|$
- Jika $a > 0$ dan $b < 0$, maka $ab < 0$ sehingga $|ab| = -ab = a(-b) = |a||b|$
- Jika $a < 0$ dan $b < 0$, maka $ab > 0$ sehingga $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$

$$(iv) \quad \text{untuk } c \geq 0, |a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c$$

$\rightarrow$

Ada 2 kemungkinan nilai $|a|$

$$|a| = \begin{cases} a \\ -a \end{cases} \tag{3}$$

maka $|a| \leq c$ mengakibatkan $-a \leq c$ atau $a \leq c$. Digabungkan diperoleh

$$-c \leq a \leq c$$

←

Dipunyai $-c \leq a \leq c$ maka diperoleh $-c \leq a$ dan $a \leq c$. Karena $|a|$ bernilai a atau $-a$, maka dapat disimpulkan $|a| \leq c$.

- (v) Dengan cara yang sama pada poin (iv) dengan mengambil $c = |a|$ maka $|a| \leq |a|$ adalah pernyataan yang benar. Implikasinya adalah $-|a| \leq a \leq |a|$.

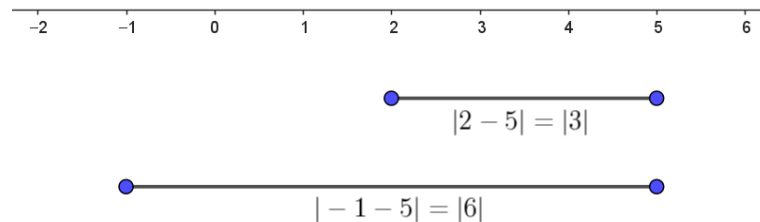
■

Definisi 2.15. *Jarak*

Jarak antara 2 bilangan real a dan b didefinisikan sebagai

$$d(a, b) = |a - b|$$

Untuk $b = 0$, $d(a, 0) = |a - 0| = |a|$ diinterpretasikan sebagai jarak a terhadap titik 0.



Gambar 2.2: Garis Bilangan Real

Jarak 5 terhadap -1 lebih besar daripada jarak 5 terhadap 2.

Teorema 2.16. (*Ketaksamaan Segitiga*)

Untuk sebarang $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Bukti. Dari Teorema 2.2(v) didapat $-|a| \leq a \leq |a|$ dan $-|b| \leq b \leq |b|$. Dengan

menjumlahkan kedua ketaksamaan diperoleh

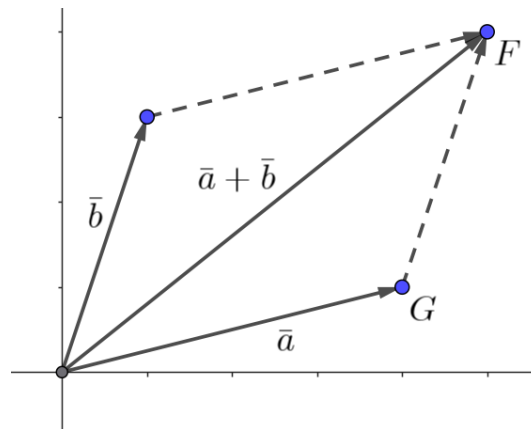
$$\begin{array}{r}
 -|a| \leq a \leq |a| \\
 -|b| \leq b \leq |b| \\
 \hline
 -|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b| \\
 -(|a| + |b|) \leq a + b \leq (|a| + |b|)
 \end{array}$$

Dengan menggunakan Teorema 2.2(iv) dengan menganggap $c = |a| + |b|$, maka terbukti bahwa

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

■

Dikatakan ketaksamaan segitiga karena ketaksamaan ini mengatakan bahwa panjang sisi sebuah segitiga tidak melebihi jumlah panjang kedua sisi lainnya.



Gambar 2.3: Garis Bilangan Real

Sisi $\triangle OGF = \bar{a}, \bar{b}$ dan $\bar{a} + \bar{b}$

Panjang $OF = |\bar{a} + \bar{b}|$ selalu kurang dari jumlah panjang sisi $OG(\bar{a})$ dan $GF(\bar{b})$.

Bentuk lain ketaksamaan segitiga

Teorema 2.17. 2.5 Untuk sebarang $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku

$$(i) \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

$$(ii) \quad |a - b| \leq |a| + |b|$$

Bukti.

(i) Tulis $a = a - b + b$, dan masukkan ketaksamaan segitiga, didapat

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|.$$

Kurangkan kedua ruas dengan $|b|$ diperoleh

$$|a| - |b| \leq |a - b| \quad \dots (i)$$

Gunakan cara yang sama untuk $b = b - a + a$

$$|b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a|$$

$$|b| - |a| \leq |b - a|$$

$$|a| - |b| \geq -|b - a| \quad \dots (ii)$$

Kombinasikan (i) dan (ii) didapat $|a - b|$

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|$$

Berdasarkan Teorema 2.2(iv) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

(ii) Gantilah b pada ks

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

dengan $-b$, sehingga diperoleh

$$|a - b| \leq |a| + |-b|$$

Karena $|-b| = |b|$ (T.2.2(ii)), maka diperoleh

$$|a - b| \leq |a| + |b|.$$

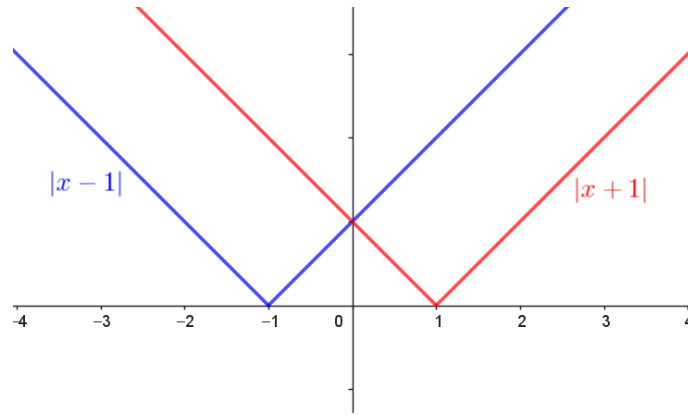
■

Contoh.

1. Tentukan himpunan bilangan real yang memenuhi pertaksamaan

$$|x - 1| > |x + 1| \quad \dots (a)$$

Jawab:



Gambar 2.4: Grafik $|x - 1|$ dan $|x + 1|$

Perhatikan bahwa $x = 1$ dan $x = -1$ adalah titik transisi, yaitu perbatasan dimana nilai mutlak berubah pola.

- Untuk $x < -1$ maka $x - 1 < 0$ dan $x + 1 < 0$
 Sehingga berlaku $|x - 1| = -(x - 1)$ dan $|x + 1| = -(x + 1)$.
 Substitusi ke pers. semula diperoleh

$$\begin{aligned} & -(x - 1) > -(x + 1) \\ \Leftrightarrow & -x + 1 > -x - 1 \\ \Leftrightarrow & 1 > -1 \end{aligned}$$

Ini adalah pernyataan yang selalu benar (tautologi) sehingga disimpulkan setiap $x < -1$ memenuhi (a).

- Untuk $-1 \leq x < 1$ maka $x + 1 \geq 0$ dan $x - 1 < 0$
 Sehingga berlaku $|x + 1| = (x + 1)$ dan $|x - 1| = -(x - 1)$.
 Dengan substitusi ke (a) diperoleh

$$\begin{aligned} & -(x - 1) > (x + 1) \\ \Leftrightarrow & -x + 1 > x + 1 \\ \Leftrightarrow & -x > x \\ \Leftrightarrow & 0 > 2x \\ \Leftrightarrow & 0 > x \end{aligned}$$

Dengan syarat sebelumnya, yaitu $-1 \leq x < 1$ maka dipenuhi $-1 \leq x < 0$.

- Untuk $x > 1$ maka $x - 1 > 0$ dan $x + 1 > 0$
 Sehingga berlaku $|x - 1| = (x - 1)$ dan $|x + 1| = (x + 1)$.

Substitusi ke (a) diperoleh

$$x - 1 > x + 1$$

$$-1 > 1$$

Terjadi kontradiksi, sehingga disimpulkan tidak ada x dalam daerah $x > 1$ yang memenuhi (a).

Gabungkan ketiga hasil diperoleh

$$\{x|x < -1\} \cup \{x|-1 \leq x < 0\} = \{x|x < 0\}$$

Cara lain, kuadratkan kedua ruas.

$$|x - 1| > |x + 1|$$

$$(x - 1)^2 > (x + 1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 > x^2 + 2x + 1$$

$$-4x > 0$$

$$4x < 0$$

$$x < 0.$$

Hasilnya sama. Hal ini dapat terjadi karena kedua ruas tak pernah bernilai negatif. Metode kuadrat hanya berlaku jika kedua ruas tak negatif. Metode ini berdasar pada $a \cdot b \geq 0 \rightarrow a \leq b \leftrightarrow a^2 \leq b^2$. Dalam kasus tak dapat dipastikan apakah syarat terpenuhi, maka cara kuadrat tak berlaku.

2. Tentukan himpunan penyelesaian $1 - |x| < |x + 1| \cdots (b)$

Jawab:

- Coba dengan kuadrat dengan menggunakan fakta ($|x|^2 = x^2$)

$$1 - |x| < |x + 1|$$

$$(1 - |x|)^2 < (|x + 1|)^2$$

$$1 - 2|x| + x^2 < x^2 + 2x + 1$$

$$-2|x| < 2x$$

$$4x^2 < 4x^2$$

$$x^2 < x^2$$

Kontradiksi, artinya tidak ada x yang memenuhi. Padahal bila diambil $x = 1$,

diperoleh

$$\begin{aligned}1 - |1| &< |1 + 1| \\0 &< 2, \text{ benar.}\end{aligned}$$

Sehingga $x = 1$ adalah salah satu penyelesaian. Metode kuadrat tak berlaku.

- Cara definisi

Perhatikan $x = -1$ dan $x = 0$ adalah titik transisi dari (b) sehingga ada 3 daerah

* untuk $x < -1$, diperoleh $|x| = (-x)$ dan $|x + 1| = -(x + 1) = -x - 1$

$$\begin{aligned}1 - (-x) &< -x - 1 \\1 + x &< -x - 1 \\2x &< -2 \\x &< -1\end{aligned}$$

* untuk $-1 \leq x < 0$, diperoleh $|x| = (-x)$ dan $|x + 1| = (x + 1)$

$$\begin{aligned}1 - (-x) &< x + 1 \\1 + x &< x + 1 \\x &< x\end{aligned}$$

Kontradiksi, tidak ada x dalam domain ini yang memenuhi.

* untuk $x \geq 0$, diperoleh $|x| = (x)$ dan $|x + 1| = (x + 1)$

$$\begin{aligned}1 - x &< x + 1 \\0 &< 2x \\0 &< x\end{aligned}$$

$\therefore$ Himpunan penyelesaian $\{x \in \mathbb{R} | x < -1 \text{ atau } x > 0\}$

3. Tentukan himpunan penyelesaian dari ketaksamaan $4x - 2 \geq 6$.

Jawab:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}4x - 2 &= 4x + (-2) \geq 6 \\ \Leftrightarrow 4x + (-2) + 2 &\geq 6 + 2 \\ \Leftrightarrow 4x &\geq 8 \\ \Leftrightarrow x &\geq 2.\end{aligned}$$

Terlihat bahwa ketaksamaan $4x - 2 \geq 6$ dipenuhi oleh semua nilai $x \in \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$.

4. Cari semua penyelesaian dari ketaksamaan $x^2 - x < 6$.

Jawab:

Kerjakan sebagai latihan.

□

Teorema 2.18. Untuk sebarang $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ dengan $n \geq 2$ berlaku

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

Bukti. Dibuktikan dengan induksi

- Akan dibuktikan benar untuk $n = 2$, yaitu

$$|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$$

benar karena merupakan ks bentuk standar.

- Diasumsikan benar untuk $n = k$, yaitu

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_k| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_k| \quad (i)$$

Akan dibuktikan untuk $n = k + 1$

$$\begin{aligned}|a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}| &\leq |a_1 + a_2 + \dots + a_k| + |a_{k+1}| \\ &\leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_k| + |a_{k+1}|\end{aligned}$$

Artinya berlaku untuk $n = k + 1$.

Maka terbukti berlaku untuk $n \geq 2$. ■

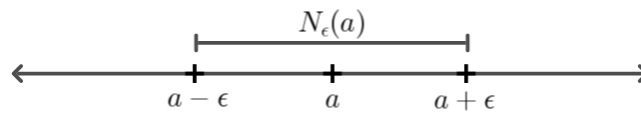
Teorema ini dapat diinterpretasikan dalam sebuah segibanyak, panjang sebuah sisi segibanyak tidak akan melebihi jumlah panjang sisi lainnya

4. Garis Bilangan Real

Interpretasi geometri yang dikenal diantaranya bilangan real (*real line*). Pada garis bilangan real, nilai dari $a \in \mathbb{R}$ adalah jarak a ke 0.

Definisi 2.19. Diberikan $a \in \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$. Persekitaran- ε (ε -neighborhood) dari a didefinisikan sebagai himpunan

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(a) &:= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} \\ &= (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \end{aligned}$$



Gambar 2.5: Visualisasi persekitaran- ε

Dapat dilihat bahwa $x \in N_\varepsilon(a) \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

Teorema 2.20. 2.8 Diberikan $a \in \mathbb{R}$. Jika x berada dalam persekitaran $N_\varepsilon(a)$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $x = a$.

Bukti. Jika x memenuhi $|x - a| < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka berdasarkan Teorema 1.12 diperoleh $|x - a| = 0$ berakibat $x = a$. ■

Latihan

1. Buktikan Teorema 2.4.
2. Cari semua penyelesaian dari ketaksamaan $x^2 - x < 6$.
3. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan-pertidaksamaan berikut.

a. $x^2 > 3x + 4$

b. $1 < x^2 < 4$

c. $\frac{1}{x} < x$

d. $\frac{1}{x} < x^2$

BAB 3

Sifat Kelengkapan Bilangan Real

Pada bagian ini akan diberikan salah satu sifat $\mathbb{R}$, yaitu sifat lengkap (*Completeness Property*). Tetapi sebelum itu, perlu dijelaskan konsep supremum dan infimum. Sifat lengkap menjamin bahwa sebuah bilangan yang menjadi batas terkecil/batas terbesar suatu himpunan selalu berada di dalam $\mathbb{R}$.

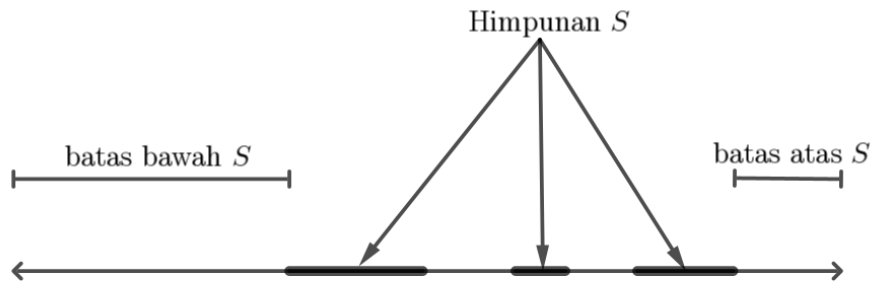
1. Supremum dan Infimum

Sebelum membahas mengenai Supremum dan Infimum, perlu diketahui bahwa jika diberikan suatu himpunan A dengan anggota $A = \{-4, 0, 2, 3, 4, 9\}$, maka dengan mudah dapat ditentukan bahwa nilai minimumnya adalah -4 dan nilai maksimumnya adalah 9 . Konsep Supremum dan Infimum sebenarnya hampir sama, hanya dalam pendefisiannya diperlukan beberapa pengetahuan tambahan lain. Maka akan diberikan pengetahuan lain tersebut untuk dapat memberikan definisi Supremum dan Infimum dengan jelas.

Definisi 3.1. Misalkan S adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{R}$.

1. Himpunan S dikatakan **terbatas atas** jika terdapat $a \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $x \leq a$, untuk setiap $x \in S$. Bilangan real a yang demikian disebut sebagai **batas atas** dari S .
2. Himpunan S dikatakan **terbatas bawah** jika terdapat $b \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $b \leq x$, untuk setiap $x \in S$. Bilangan real b yang demikian disebut sebagai **batas bawah** dari S .
3. Himpunan S dikatakan **terbatas** jika S terbatas atas dan terbatas bawah. Himpunan X dikatakan **tidak terbatas** jika S tidak terbatas atas atau tidak terbatas bawah.

Pada umumnya batas atas atau batas bawah sebuah himpunan tidak berada pada himpunan tersebut, kecuali beberapa titik.



Gambar 3.1: Visualisasi persekitaran- ϵ

Dari ilustrasi terlihat bahwa batas bawah dan batas atas tidak tunggal seperti nilai maksimum dan minimum.

Himpunan batas atas A ditulis sebagai $hba(A)$

Himpunan batas bawah A ditulis sebagai $hbb(A)$

Agar lebih mudah memahami konsep keterbatasan, perhatikan contoh berikut:

Contoh.

1. Misalkan

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 5\}.$$

- Batas bawah: setiap $b \leq 0$.
- Batas atas: setiap $a \geq 5$.
- Jadi B terbatas atas dan terbatas bawah, sehingga B adalah himpunan **terbatas**.



2. Misalkan

$$C = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}.$$

- Batas bawah: setiap $b \leq 2$.
- Tidak ada batas atas.
- Jadi C terbatas bawah tetapi tidak terbatas atas.



3. Misalkan

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 7\}.$$

- Batas atas: setiap $a \geq 7$.

- Tidak ada batas bawah.
- Jadi D terbatas atas tetapi tidak terbatas bawah.



4. Misalkan

$$E = \mathbb{R}.$$

- Tidak ada batas bawah.
- Tidak ada batas atas.
- Jadi E adalah himpunan tidak terbatas.



□

Jadi dapat disimpulkan:

- Terbatas atas: ada atap.
- Terbatas bawah: ada lantai.
- Terbatas: ada atap dan lantai sekaligus.
- Tak terbatas: tidak ada atap atau lantai, atau salah satunya tidak ada.

Selanjutnya adalah definisi Infimum dan Supremum

Definisi 3.2. Misal S himpunan bagian dari $\mathbb{R}$.

1) Misal S terbatas di atas. Batas atas u dikatakan **supremum** S , ditulis

$$u = \sup(s)$$

jika tak ada bilangan lain yang lebih kecil dari u yang menjadi batas atas S . Dengan kata lain u adalah batas atas terkecil S .

2) Misal S terbatas di bawah. Batas bawah w dikatakan **infimum** S , ditulis

$$u = \inf(s)$$

jika tak ada bilangan lain yang lebih besar dari w yang menjadi batas bawah S . Dengan kata lain w adalah batas bawah terbesar S .

Lebih jelasnya dapat diperhatikan contoh berikut:

Contoh.

1. Misalkan

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 5\}.$$

- Batas bawah: $\{b \in \mathbb{R} : b \leq 0\}$.
- Batas atas: $\{a \in \mathbb{R} : a \geq 5\}$.
- Infimum: $\inf B = 0$.
- Supremum: $\sup B = 5$.

2. Misalkan

$$C = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}.$$

- Batas bawah: $\{b \in \mathbb{R} : b \leq 2\}$.
- Tidak ada batas atas.
- Infimum: $\inf C = 2$.
- Supremum: tidak ada (atau $\sup C = +\infty$ jika bekerja dalam $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).

3. Misalkan

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 7\}.$$

- Tidak ada batas bawah.
- Batas atas: $\{a \in \mathbb{R} : a \geq 7\}$.
- Infimum: tidak ada (atau $\inf D = -\infty$).
- Supremum: $\sup D = 7$.

4. Misalkan

$$E = \mathbb{R}.$$

- Tidak ada batas bawah.
- Tidak ada batas atas.
- Infimum: tidak ada (atau $\inf E = -\infty$).
- Supremum: tidak ada (atau $\sup E = +\infty$).

□

Maka dapat disimpulkan

- **Infimum** adalah batas bawah terbesar dari suatu himpunan.
- **Supremum** adalah batas atas terkecil dari suatu himpunan.

- Jika himpunan tidak terbatas, maka infimum atau supremum bisa jadi tidak ada dalam $\mathbb{R}$.
- Dalam garis bilangan real yang diperluas ($\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), infimum atau supremum dapat berupa $+\infty$ atau $-\infty$.

Teorema 3.3. *Diberikan $S \subset \mathbb{R}$.*

- (i) *Jika S memiliki supremum maka supremum tersebut tunggal.*
- (ii) *Jika S memiliki infimum maka infimum tersebut tunggal.*

Bukti.

- (i) Andai supremum tidak tunggal, yaitu $u = \sup S$ dan $u_1 = \sup S$ dengan $u \neq u_1$. Akibatnya ada dua kemungkinan, yaitu $u < u_1$ atau $u > u_1$.
 - Untuk $u < u_1$ berarti u bukan batas atas S . Ini berlawanan dengan $u = \sup S$.
 - Untuk $u > u_1$ berarti u bukan batas atas S . Ini berlawanan dengan $u_1 = \sup S$.

Jadi pengandaian $u \neq u_1$ salah. Seharusnya $u = u_1$.

- (ii) Buktikan sebagai latihan.

■

Berdasarkan definisi dan beberapa sifat Infimum dan Supremum, didapatkan teorema yang ekuivalen dengan Definisi 3.2.

Teorema 3.4. *Diberikan $S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset, u = \sup S$ jika dan hanya jika*

- (i) $a \leq u$ untuk setiap $a \in S$
- (ii) untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $a_\varepsilon \in S$ sehingga $u - \varepsilon < a_\varepsilon$

Bukti.

- (ii) $\Rightarrow$ Diketahui $u = \sup S$ dan diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $u - \varepsilon < u$ maka $u - \varepsilon$ bukan batas atas S . Maka terdapat $a_\varepsilon \in S$ yang lebih besar dari $u - \varepsilon$, sehingga $u - \varepsilon < a_\varepsilon$.
 $\Leftarrow$ Diketahui $u - \varepsilon < a_\varepsilon$. Jika u merupakan batas atas S dan jika memenuhi $v < u$, maka diambil $\varepsilon = u - v$. Jelas $\varepsilon > 0$ terdapat $a_\varepsilon \in S$ sehingga $u - \varepsilon = u - (u - v) = v < a_\varepsilon$. Berarti v bukan batas atas S dan berdasarkan definisi karakteristik sup, maka $u = \sup$.

■

Akibat 3.5. Diberikan $S \subset \mathbb{R}, S \neq \emptyset$, $w = \inf S$ jika dan hanya jika

(i) $w \leq a$ untuk setiap $a \in S$

(ii) untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $a_\varepsilon \in S$ sehingga $t + \varepsilon > a_\varepsilon$

Bukti. Akan dibuktikan menggunakan bantuan ilustrasi berikut

Misal himpunan S

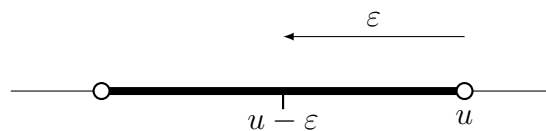
Akan dibuktikan $u = \sup S$



Langkah:

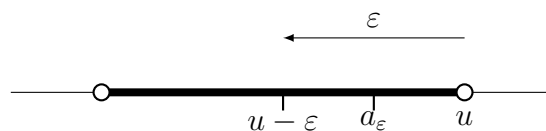
1. Buktikan u selalu lebih besar dari semua anggota S

2. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, geser u sejauh ε kekiri



Sehingga diperoleh $u - \varepsilon$

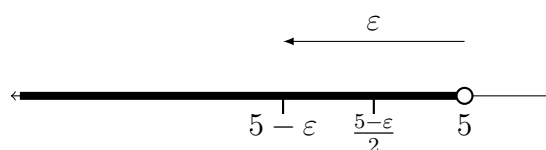
3. Cari $a_\varepsilon \in S$, kalau kita geser u sejauh ε ke kiri, maka akan ada disebelah kanan $u - \varepsilon$.



Sehingga terbukti bahwa akan dapat ditemukan a_ε sehingga $t + \varepsilon > a_\varepsilon$ ■

Contoh.

1. Buktikan supremum dari himpunan $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$ adalah 5. Ilustrasikan seperti sebelumnya



Bukti.

- (i) Jelas $5 \geq a$, untuk setiap $a \in A$
- (ii) Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka ada $a_\varepsilon \in A$, (harus ditemukan $a_\varepsilon \in A$ dengan syarat $5 - \varepsilon < a_\varepsilon$. Artinya a_ε posisinya di kanan $5 - \varepsilon$) yang nilainya adalah:

$$a_\varepsilon = 5 - \frac{\varepsilon}{2}$$

sehingga $5 - \varepsilon < a_\varepsilon = 5 - \frac{\varepsilon}{2}$

■

2. Buktikan supremum dari himpunan $B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 5\}$ adalah 5.

Bukti.

- (i) Jelas $5 \geq b$, untuk setiap $b \in B$ Perhatikan ilustrasi berikut



- (ii) Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka ada $b_\varepsilon \in B$, yaitu

$$b_\varepsilon = 5$$

sehingga $5 - \varepsilon < b_\varepsilon = 5$

■

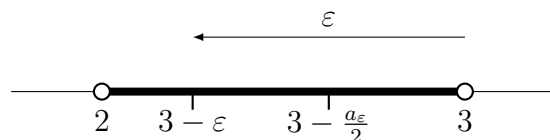
3. Buktikan supremum dari himpunan $C = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 3\}$ adalah 3.

Bukti.

- (i) Jelas $3 \geq c$, untuk setiap $c \in C$
- (ii) Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka ada $c_\varepsilon \in C$, yaitu

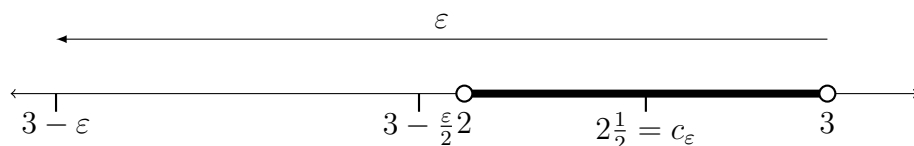
$$c_\varepsilon = \dots$$

Kasus 1 jika epsilon yang dipilih nilainya kurang dari 1.



sehingga $3 - \varepsilon < c_\varepsilon$.

Kasus 2 jika epsilon yang dipilih nilainya lebih dari 1.



Maka terdapat 2 nilai c_ϵ yang ditemukan, yaitu $c_\epsilon = \begin{cases} 3 - \frac{\epsilon}{2}, & \text{untuk } \epsilon < 1 \\ 2\frac{1}{2}, & \text{untuk } \epsilon > 1 \end{cases}$

■

4. Buktikan infimum dari himpunan $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ adalah 1.

Bukti. Sebagai latihan.

■

□

2. Sifat Kelengkapan Bilangan Real $\mathbb{R}$

Akan dibahas mengenai aksioma kelengkapan $\mathbb{R}$ atau juga disebut sebagai aksioma sifat supremum $\mathbb{R}$.

Aksioma 3.6. Misal diberikan $S \subset \mathbb{R}$ dan $S \neq \emptyset$. Jika S terbatas ke atas maka ada $u \in \mathbb{R}$ dengan $u = \sup s$.

Setiap himpunan tak kosong dan terbatas ke atas pasti memiliki supremum.

Contoh. $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$

Jelas A terbatas ke atas, maka A pasti punya supremum bilangan real yaitu 2. □

Salah satu kegunaan atau aplikasi dari sifat kelengkapan bilangan real adalah sifat Archimedes.

Teorema 3.7. (Sifat Archimedes)

Jika $x \in \mathbb{R}$, maka terdapat $n \in \mathbb{N}$ sehingga $x < n$.

Berapapun biangan real pasti ada bilangan asli yang lebih besar dari dia.

Bukti. Andai untuk semua $n \in \mathbb{N}$ berlaku $n \leq x$.

Maka x adalah batas atas $\mathbb{N}$.

Berdasarkan Aksioma 3.6, maka $\mathbb{N}$ punya supremum, misal $\sup \mathbb{N} = u$.

Maka didapat $u - 1$ bukan batas atas $\mathbb{N}$ (karena u batas atas terkecil) artinya ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $u - 1 < n_0$.

Diperoleh $u < n_0 + 1$ dan $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ ($n_0 \in \mathbb{N}$ ditambah 1 tetap $\in \mathbb{N}$).

Artinya u bukan batas atas $\mathbb{N}$. Kontradiksi

■

Sifat Archimedes memberi tahu bahwa $\mathbb{N}$ tak terbatas.

Akibat 3.8. Jika $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ maka $\inf S = 0$

Bukti.

(i) Jelas $0 \leq a$, untuk semua $a \in S$.

(ii) Diberikan $\varepsilon > 0$, maka $\frac{1}{\varepsilon} > 0$.

Berdasarkan sifat Archimedes, pasti ada $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{\varepsilon} < n_\varepsilon$.

Atau $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$.

Atau $\frac{1}{n_\varepsilon} < 0 + \varepsilon$.

Berdasarkan Teorema 3.6 terbukti 0 adalah $\inf S$

■

Akibat 3.9. Jika $t > 0$, maka terdapat $n_t \in \mathbb{N}$ sehingga $0 < \frac{1}{n_t} < t$

$t = \frac{1}{6}$, maka ada $n_t = 7$ sehingga berlaku $0 < \frac{1}{7} < \frac{1}{6}$.

Bukti. Sebagai latihan.

■

Akibat 3.10. Jika $y > 0$, maka terdapat $n_y \in \mathbb{N}$ sehingga $n_y - 1 < y < n_y$

Bukti. Sebagai latihan.

■

Contoh. $y = 10\frac{1}{2}$, maka ada $n_y = 11$ sehingga $10 < 10\frac{1}{2} < 11$.

□

Pada awal pembahasan mengenai himpunan bilangan real, nilai $\sqrt{2}$ bukanlah bilangan rasional, tetapi masih termasuk dalam keluarga bilangan real. Pada kesempatan ini akan dibahas mengenai eksistensi (keberadaan) $\sqrt{2}$

Teorema 3.11. Terdapat bilangan real positif x sehingga $x^2 = 2$.

Bukti. Sebagai latihan.

Petunjuk: Bentuk himpunan $S = \{s \in \mathbb{R} : s \geq 0 \text{ dan } s^2 < 2\}$

(Ada di buku Introduction to Real Analysis Bartle. Chapter: The Real Numbers.
Sub chapter: Appliance of the sup property)

■

Kita tahu bahwa diantara dua bilangan rasional, ada bilangan rasional yang lainnya. Sifat ini kita sebut sebagai sifat kepadatan bilangan rasional, yang dituliskan dalam teorema berikut.

Teorema 3.12. Jika $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x < y$, maka ada bilangan rasional $q \in \mathbb{Q}$ sehingga $x < q < y$.

Bukti. Sebagai latihan. ■

Contoh. $\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array} \right\} 1, 2 \in \mathbb{R}, \quad 1 < 2$

Ada $q = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ sehingga $1 < \frac{3}{2} < 2$ □

Dari teorema tersebut memunculkan pula sifat kepadatan bilangan rasional.

Akibat 3.13. *Jika $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x < y$, maka ada bilangan irrasional r sehingga berlaku $x < r < y$.*

Bukti. Berdasarkan Teorema 3.12 ada bilangan real $\frac{x}{\sqrt{2}}$ dan $\frac{y}{\sqrt{2}}$ dengan sifat ada bilangan rasional q yang memenuhi $\frac{x}{\sqrt{2}} < q < \frac{y}{\sqrt{2}}$. Akibatnya $x < q\sqrt{2} < y$. $q\sqrt{2}$ adalah bilangan irrasional. ■

3. Interval dalam $\mathbb{R}$

Dalam himpunan bilangan real, suatu himpunan tidak hanya dapat dinyatakan dengan menuliskan seluruh anggotanya secara eksplisit atau melalui sifat-sifat yang dimilikinya, tetapi juga dapat direpresentasikan dalam bentuk interval.

Jika diberikan $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$ maka

1. Interval terbuka

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

2. Interval tertutup

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

3. Interval setengah tertutup/setengah terbuka

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

a dan b disebut sebagai titik ujung

Panjang interval = $b - a$

Jika $b = a$ maka

$$(a, a) = \emptyset$$

$$[a, a] = \{a\}$$

4. Interval tak terbatas

Simbol ∞ dan $-\infty$ (dibaca infiniti) menyimbolkan titik ujung yang tak berhingga atau tak terbatas.

- Interval terbuka tak terbatas

$$\left. \begin{array}{l} (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\ \text{dan} \\ (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \end{array} \right\} \rightarrow \text{sinar terbuka}$$

- Interval tertutup tak terbatas

$$\left. \begin{array}{l} [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \\ \text{dan} \\ (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \end{array} \right\} \rightarrow \text{sinar tertutup}$$

Himpunan bilangan real adalah himpunan yang terbuka dan tak terbatas, maka jika himpunan bilangan real jika dituliskan dalam bentuk interval menjadi $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Latihan

1. Buktikan Akibat 3.10.
2. Buktikan Teorema 3.12.
3. Cari semua penyelesaian dari ketaksamaan $x^2 - x < 6$.
4. Buktikan infimum dari himpunan $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ adalah 1.

BAB 4

Barisan Bilangan Real

1. Barisan Bilangan Real

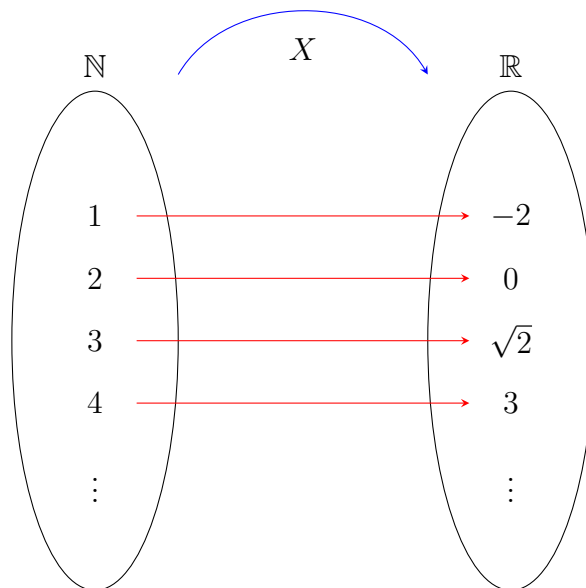
Barisan pada himpunan S adalah suatu fungsi dengan domain $\mathbb{N}$ dan range dalam S . Dalam bab ini akan dibahas mengenai barisan dalam $\mathbb{R}$ dan konvergensi barisan.

Definisi 4.1. Barisan bilangan real adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan $\mathbb{N}$ dengan range $\mathbb{R}$. Dengan kata lain, barisan dalam $\mathbb{R}$ menyatakan setiap bilangan asli $n = 1, 2, 3, \dots$ kepada suatu bilangan real $\mathbb{R}$.

Jika $X : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan barisan, maka nilai dari x pada n ditulis x_n . Barisan dapat dituliskan dengan beberapa simbol, diantaranya:

$$\begin{array}{ll} * X & * \{x_n\} \\ * (x_n) & * \{x_n\} \ n \geq 1 \\ * (x_n : n \in \mathbb{N}) & \end{array}$$

Semuanya merupakan simbol dari barisan $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Berikut digambarkan hubungan antara $\mathbb{N}$ dan $\mathbb{R}$ menggunakan diagram panah yang merupakan penggambaran barisan bilangan.



Gambar 4.1: Diagram Panah Barisan Bilangan Real

Berikut diberikan beberapa contoh barisan.

Contoh.

1. Barisan (x_n) dengan $x_n = n$ adalah barisan $1, 2, 3, \dots$
2. Barisan (x_n) dengan $x_n = \frac{1}{n}$ adalah barisan $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$
3. Barisan (x_n) dengan $x_n = (-1)^n$ adalah $-1, 1, -1, 1, \dots$
4. Barisan (y_n) dengan $y_n = (\frac{1}{2})^n$ adalah barisan $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$
5. Barisan (y_n) dengan $y_n = (\frac{n}{n+1})$ adalah $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$
6. Barisan (x_n) dengan $x_n = 3$ adalah barisan $3, 3, 3, \dots$ (disebut barisan konstan)

□

Masing-masing barisan tersebut dapat dioperasikan dengan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4.2. Diberikan barisan (x_n) dan (y_n) serta $\alpha \in \mathbb{R}$, maka dapat didefinisikan:

- (i) $(x_n) \pm (y_n) = (x_n \pm y_n)$
- (ii) $\alpha(x_n) = (\alpha x_n)$
- (iii) $(x_n)(y_n) = (x_n y_n)$
- (iv) $\frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ dengan $y_n \neq 0$

Berikut diberikan contoh operasi barisan.

Contoh. Diberikan barisan

$$(x_n) = 4n \rightarrow 4, 8, 12, 16, \dots$$

$$(y_n) = \frac{n}{n+1} \rightarrow \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

1. Tentukan nilai dari barisan $(x_n) + (y_n)$.

Jawab :

$$(x_n) + (y_n) = \frac{9}{2}, \frac{26}{3}, \frac{51}{4}, \dots$$

2. Tentukan bentuk dari barisan $(x_n) + (y_n)$.

Jawab:

$$(x_n) + (y_n) = \left(4n + \frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{4n(n+1)+n}{n+1}\right) = \left(\frac{4n^2+5n}{n+1}\right)$$

3. Untuk $\alpha = 2$, tentukan nilai dan bentuk dari barisan $\alpha(y_n)$.

Jawab:

$$\text{Nilai barisan : } 1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \dots$$

$$\text{Bentuk barisan : } 2\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{2n}{n+1}\right).$$

4. Tentukan nilai dan bentuk dari barisan $(x_n)(y_n)$.

Jawab:

Nilai barisan :

Bentuk barisan :

5. Tentukan nilai dan bentuk dari barisan $\frac{(x_n)}{(y_n)}$.

Jawab:

Nilai barisan :

Bentuk barisan :

□

2. Limit Barisan

Definisi 4.3. (*Limit Barisan*)

Diketahui (x_n) barisan bilangan real. Suatu bilangan real x disebut sebagai **limit barisan** (x_n) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq k(\varepsilon)$, berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.

Jika sebuah barisan bilangan (x_n) memiliki suku-suku yang semakin lama semakin dekat dengan suatu bilangan x , maka bilangan x itulah yang disebut *limit* barisan tersebut. Dengan kata lain, jika kita melihat suku-suku yang jauh sekali (misalnya suku ke-100, ke-1000, ke-1.000.000, dan seterusnya), maka nilai x_n akan semakin dekat ke x .

Contoh. Perhatikan barisan berikut:

$$\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \dots$$

Jika dihitung beberapa suku awal:

$$\frac{3}{1} = 3, \quad \frac{3}{2} = 1.5, \quad \frac{3}{3} = 1, \quad \frac{3}{4} = 0.75, \quad \frac{3}{10} = 0.3, \quad \frac{3}{100} = 0.03$$

Terlihat bahwa semakin besar nilai n , hasil $\frac{3}{n}$ semakin kecil dan mendekati 0. Oleh karena itu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$$

Intuisi: Bayangkan kita memiliki 3 kue yang dibagikan ke semakin banyak orang.

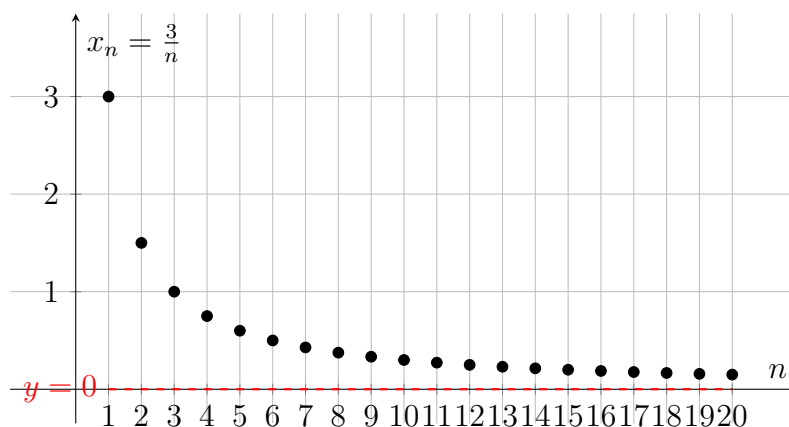
- Jika dibagi ke 1 orang, setiap orang mendapat 3 kue.
- Jika dibagi ke 2 orang, setiap orang mendapat 1.5 kue.
- Jika dibagi ke 10 orang, setiap orang mendapat 0.3 kue.

- Jika dibagi ke 100 orang, setiap orang mendapat 0.03 kue.

Semakin banyak orangnya, bagian setiap orang akan semakin kecil dan mendekati 0. $\square$

Perhatikan grafik berikut yang menggambarkan barisan

$$x_n = \frac{3}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



Gambar 4.2: Ilustrasi nilai barisan $x_n = \frac{3}{n}$ yang menuju 0.

Dari grafik terlihat bahwa semakin besar n , titik-titik barisan $\frac{3}{n}$ semakin mendekati garis $y = 0$. Inilah yang dimaksud dengan:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0.$$

Jika x merupakan limit dari suatu barisan (x_n) , maka dapat dikatakan (x_n) **konvergen** ke x atau (x_n) memiliki limit x .

Disimbolkan :

$$* \lim_{x \rightarrow \infty} (x_n) = x \quad * \lim(x_n) = x \quad * (x_n) \rightarrow x$$

Jika **tidak konvergen**, maka (x_n) dikatakan divergen.

Contoh.

1. $\lim(x_n)$ dengan $x_n = n$ adalah ∞
 $x_n = 1, 2, 3, 4, \dots \leftarrow$ menuju ke ∞
2. $\lim(x_n)$ dengan $x_n = \frac{1}{n}$ adalah 0
 $x_n = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \leftarrow$ menuju ke 0

3. $\lim(x_n)$ dengan $(x_n) = (-1)^n$
 $x_n = -1, 1, -1, 1, \dots \leftarrow$ tidak menuju ke nilai apapun
maka (x_n) divergen atau tidak memiliki limit.

□

Jika suatu barisan konvergen, maka limitnya hanya satu atau tunggal.

Teorema 4.4. *Jika barisan (x_n) konvergen, maka limitnya tunggal.*

Bukti.

- Andaikan limit (x_n) tidak tunggal, yaitu $x' = \lim(x_n)$ dan $x'' = \lim(x_n)$, dengan $x' \neq x''$.
- Karena $x' = \lim(x_n)$, maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $k' \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq k'$ sehingga berlaku $|x_n - x'| < \varepsilon/2$.
- Selanjutnya, dipunyai juga $x'' = \lim(x_n)$, maka untuk ε diatas terdapat $k'' \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq k''$ sehingga berlaku $|x_n - x''| < \varepsilon/2$.
- Dipilih $k = \max\{k', k''\}$.
- Berdasarkan ketaksamaan segitiga, untuk $n \geq k$ diperoleh

$$\begin{aligned} |x' - x''| &= |x' - x_n + x_n - x''| \\ &= |x' - x_n| + |x_n - x''| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

- Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $x' - x'' = 0$ yang berarti $x' = x''$.

Terjadi kontradiksi, maka terbukti. ■

Teorema 4.5. *Jika (x_n) barisan bilangan real dan $x \in \mathbb{R}$, maka empat pernyataan berikut ekuivalen.*

- Barisan (x_n) konvergen.*
- Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq k$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.*
- $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \geq k$ berlaku $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.*
- $\forall$ Persekitaran $V_\varepsilon(x)$ dari x , $\exists k \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall n \geq k$ berlaku $x_n \in V_\varepsilon(x)$*

Bukti. (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a)

(a) $\Rightarrow$ (b) terbukti berdasarkan definisi

(b) $\Rightarrow$ (c) diketahui bahwa $|x_n - x| < \varepsilon$, maka

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon + x < x_n < \varepsilon + x$$

$$\Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$$

(c) $\Rightarrow$ (d) $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in v_\varepsilon(x)$

(d) $\Rightarrow$ (a) $x_n \in V_\varepsilon(x) \Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$

$$\Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

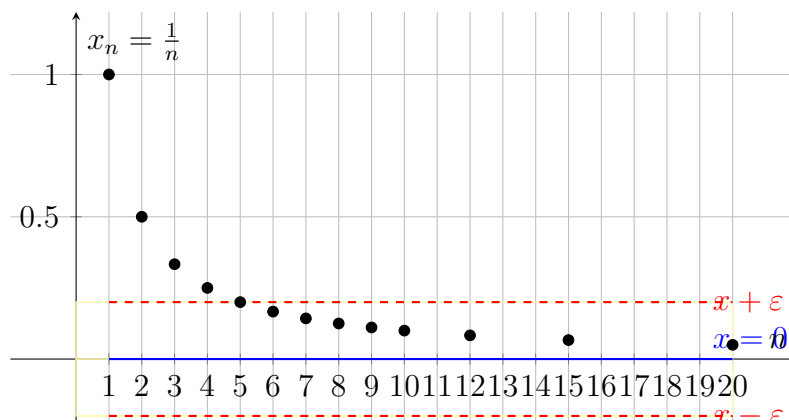
■

Barisan x_n yang konvergen ke x , atau ditulis $x_n \rightarrow x$, dapat didefinisikan sebagai berikut: $\forall \varepsilon > 0, \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n \in \mathbb{N}$ dengan $n > k(\varepsilon)$, berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.

Perhatikan ilustrasi berikut Misalkan $x_n = \frac{1}{n}$ dengan limit $x = 0$.

Definisi formal:

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ sehingga } \forall n > k(\varepsilon) : |x_n - x| < \varepsilon.$$



Gambar 4.3: Ilustrasi definisi limit barisan dengan ε

Pada gambar, pita kuning menunjukkan interval $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ dengan $\varepsilon = 0.2$. Terlihat bahwa setelah $n > 5$, semua titik x_n masuk ke dalam pita tersebut. Inilah yang dimaksud oleh definisi limit barisan. Berikut diberikan contoh dalam pembuktian suatu barisan konvergen.

Contoh.

1. Tunjukkan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Bukti. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ maka $\frac{1}{\varepsilon} > 0$.

Berdasarkan teori Archimedes, terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{\varepsilon} < k \Leftrightarrow \frac{1}{k} < \varepsilon$.

Maka jika dipilih $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq k$, diperoleh $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{n}$ sehingga $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \varepsilon$.

Akibatnya untuk $n \geq k$ diperoleh

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} - 0 \right| &< \varepsilon \\ \left| \frac{1}{n} \right| &< \varepsilon \\ \frac{1}{n} &< \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ■

2. Tunjukkan bahwa $\lim_{2n} \frac{1}{2n} = 0$

Bukti. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka $\frac{1}{2\varepsilon} > 0$.

Berdasarkan teori Archimedes, terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{2\varepsilon} < k \Leftrightarrow \frac{1}{2k} < \varepsilon$.

Maka jika dipilih $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq k$, diperoleh $\frac{1}{2k} \geq \frac{1}{2n}$ sehingga $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2k} < \varepsilon$.

Akibatnya, $\left| \frac{1}{2n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon$.

Terbukti $\frac{1}{2n} \rightarrow 0$.

atau

$$2n > n \rightarrow \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2n} - 0 \right| &= \left| \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \varepsilon \\ \frac{1}{2n} &< \varepsilon \end{aligned}$$
 ■

3. Tunjukkan bahwa $\lim_{n+1} \left(\frac{3n+2}{n+1} \right) = 3$.

Bukti. Buktikan sebagai latihan ■

□

Selanjutnya akan dibahas mengenai konsep ekor barisan.

Definisi 4.6. Misalkan diberikan sebuah barisan bilangan real

$$X = (X_1, X_2, X_3, \dots).$$

Untuk suatu bilangan $m \in \mathbb{N}$, yang dimaksud dengan **ekor ke- m** dari barisan X adalah barisan baru yang dimulai dari suku setelah X_m .

Secara formal, ekor ke- m dituliskan sebagai

$$X_m = (X_{m+n} : n \in \mathbb{N}) = (X_{m+1}, X_{m+2}, X_{m+3}, \dots).$$

Dengan kata lain, ekor ke- m dapat dipahami sebagai hasil “memotong” barisan X pada suku ke- m , kemudian mengambil semua suku sesudahnya.

Perhatikan contoh berikut.

Contoh.

1. Misalkan barisan $X = (2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots)$. Barisan ini merupakan bilangan genap positif.

- Ekor ke-3:

$$X_3 = (X_4, X_5, X_6, \dots) = (8, 10, 12, \dots).$$

- Ekor ke-6:

$$X_6 = (X_7, X_8, \dots) = (14, 16, 18, \dots).$$

2. Misalkan barisan $Y = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$.

- Ekor ke-2:

$$Y_2 = (Y_3, Y_4, Y_5, \dots) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots).$$

- Ekor ke-5:

$$Y_5 = (Y_6, Y_7, \dots) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots).$$

□

Teorema 4.7. Diberikan barisan bilangan real $X = (X_n : n \in \mathbb{N})$ dan $m \in \mathbb{N}$. Maka $(X_{m+n} : n \in \mathbb{N})$ konvergen jika dan hanya jika X konvergen. Dalam hal ini,

$$\lim X_m = \lim X$$

Bukti.

- Perhatikan bahwa untuk sebarang $p \in \mathbb{N}$, elemen ke- p dari X_m adalah elemen ke- $(p+m)$ dari X . Sama halnya jika $a > m$, maka elemen ke- q dari X_m adalah elemen ke- $(q-m)$ dari X .

Diasumsikan bahwa X konvergen ke x , artinya untuk sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq k$ berlaku $|X_n - x| < \varepsilon$. Maka pada X_m untuk $k \geq K - m$ berlaku $|x_k - x| < \varepsilon$. Dapat diambil $K_m = k - m$ sehingga X_m konvergen ke x .

- Sebaliknya, jika pada X_m untuk $k > K_m$ berlaku $|x_k - x| < \varepsilon$ maka pada X untuk $n \geq K + m$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.

Dapat diambil $k = K_m + m$

$\therefore$ Terbukti $X \rightarrow x \Leftrightarrow X_m \rightarrow x$.

■

Selanjutnya, untuk mempermudah pemahaman mengenai konsep limit dan kekonvergenan, akan disajikan pula pembuktian limit dengan pendekatan numerik.

Contoh.

1. Buktikan bahwa $\lim \frac{1}{n} = 0$

Bukti. $x_n = \frac{1}{n}$ $x = 0$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Akan dibuktikan $|x_n - x| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, untuk setiap $n \geq k$. Diperoleh

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Jadi, cukup diambil nilai $k \in \mathbb{N}$ terkecil yang lebih dari $\frac{1}{\varepsilon}$.

Misal diberikan $\varepsilon = 0,013$, maka $\frac{1}{\varepsilon} = 76,92307\dots$ Jadi cukup ambil $k = 77$.

Cek untuk x_n :

$$x_{77} = 0,0129 \quad x_{80} = 0,0125$$

$$x_{78} = 0,0128 \quad x_{81} = 0,0123$$

$$x_{79} = 0,0126$$

Karena semua nilainya kurang dari $\varepsilon = 0,013$, berdasarkan definisi limit barisan, maka terbukti $\lim \frac{1}{n} = 0$. ■

2. Diasumsikan barisan (y_n) konvergen. Apabila $y_1 = 2$ dan $y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + \frac{2}{y_n})$ untuk $n \geq 1$, hitunglah $\lim(y_n)$!

Bukti. Berdasarkan Teorema 4.7, maka $\lim y_n = \lim y_{n+1}$.

Misal $\lim y_n = y$, maka

$$\lim y_{n+1} = \lim \left(\frac{1}{2} \left(y_n + \frac{2}{y_n} \right) \right)$$

$$y = \frac{1}{2} \lim \left(y_n + \frac{2}{y_n} \right)$$

$$y = \frac{1}{2} \left(\lim y_n + \lim \frac{2}{y_n} \right)$$

$$y = \frac{1}{2} \left(\lim y_n + \frac{2}{\lim y_n} \right)$$

$$y = \frac{1}{2} \left(y + \frac{2}{y} \right)$$

$$2y = y + \frac{2}{y}$$

$$y = \frac{2}{y}$$

$$y^2 = 2$$

$$y = \pm\sqrt{2}$$

Karena setiap sukunya positif, maka dipilih nilai $\sqrt{2}$ sebagai $\lim y_n$, yaitu $\lim y_n = \sqrt{2}$. ■

3. Diketahui $x_1 = 1$

$$x_2 = 2$$

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{x_{n+1} - x_n}$$

Diasumsikan (x_n) konvergen. Hitung $\lim(x_n)$!

Bukti. $\lim x_n = \lim x_{n+1} = \lim x_{n+2} = x$
 $\lim x_n = x$, maka

$$\begin{aligned}\lim x_n &= \lim \left(\frac{x_{n+1} + x_n}{x_{n+1} - x_n} \right) \\ \lim x_n &= \frac{\lim(x_{n+1}) + \lim(x_n)}{\lim(x_{n+1}) - \lim(x_n)} \\ x &= \frac{x + x}{x - x} \\ x &= \frac{2x}{0} \quad \text{maka tidak terdefinisi}\end{aligned}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = \frac{x_2 + x_1}{x_2 - x_1} = \frac{2+1}{2-1} = 3$$

$$x_4 = \frac{x_3 + x_2}{x_3 - x_2} = \frac{3+2}{3-2} = 5$$

$$x_5 = \frac{x_4 + x_3}{x_4 - x_3} = \frac{5+3}{5-3} = 4$$

$$x_6 = \frac{x_5 + x_4}{x_5 - x_4} = \frac{4+5}{4-5} = -9$$

$\therefore x_n$ divergen.

Maka asumsi (x_n) konvergen salah. ■

□

Teorema 4.8. Diberikan barisan bilangan real (a_n) dan (x_n) . Jika $c > 0$ dan $m \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku:

$$|x_n - x| \leq c|a_n|, \text{ untuk semua } n \geq m, \lim a_n = 0$$

maka $\lim x_n = x$

Bukti. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $\lim a_n = 0$, maka terdapat $k_a \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon/c$ untuk setiap $n \geq k_a$. Jadi untuk setiap $n \geq k_a = \max\{k_a, m\}$ berlaku

$$|x_n - x| \leq c|a_n| < c \cdot \varepsilon/c = \varepsilon.$$

Terbukti $\lim x_n = x$. ■

Perhatikan contoh berikut:

Contoh. Jika $a > 0$, buktikan bahwa $\lim \left(\frac{1}{1+na} \right) = 0$.

Bukti. Karena $a > 0$, maka $1 < na < na + 1$, akibatnya berlaku

$$\frac{1}{na} > \frac{1}{na+1} \Leftrightarrow \frac{1}{na+1} < \frac{1}{na}$$

Selanjutnya,

$$\left| \frac{1}{1+na} - 0 \right| = \left| \frac{1}{1+na} \right| = \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{a}$$

Ambil $c = \frac{1}{a}$ dan $a_n = \frac{1}{n}$.

$\lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$, maka berdasarkan Teorema 4.8, terbukti $\lim \left(\frac{1}{1+na} \right) = 0$. ■

□

Definisi 4.9. Barisan (x_n) dikatakan terbatas jika dan hanya jika ada bilangan $M > 0$ sehingga $|x_n| < m$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Contoh.

- $x_n = \frac{1}{n} \leftrightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

Diambil $m = 1$, maka $|x_n| \leq 1$

$\therefore x_n$ terbatas.

- $y_n = (-1)^n \rightarrow -1, 1, -1, 1, \dots$

Diambil $m = 1$, maka $|y_n| \leq 1$

$\therefore y_n$ terbatas.

- $z_n = 2n \rightarrow 2, 4, 6, 8, \dots$

$\therefore z_n$ tidak terbatas, karena tidak dapat ditemukan nilai m sehingga $|z_n| \leq m$.

□

Teorema 4.10. Jika barisan (x_n) konvergen, maka (x_n) terbatas.

Bukti. Diketahui (x_n) konvergen, katakan $\lim x_n = x$. Diambil $\varepsilon = 1$ maka terdapat $k \in \mathbb{N}$, sehingga berlaku $|x_n - x| < \varepsilon = 1$ untuk setiap $n \geq k$.

Berdasarkan Teorema Ketaksamaan Segitiga, diperoleh

$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < 1$$

Berdasarkan Teorema sifat nilai mutlak, diperoleh

$$||x_n| - |x|| < 1$$

$$|x_n| - |x| < 1$$

$$|x_n| < 1 + |x| \quad \text{untuk setiap } n \geq k.$$

Diambil $m = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots, |x_{k+1}|, 1 + |x|\}$ agar terpenuhi $|x_n| \leq m$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan definisi 4.9, maka terbukti (x_n) terbatas. ■

Teorema 4.11. *Jika barisan $X = (x_n)$ konvergen ke x dan barisan $Y = (y_n)$ konvergen ke y , maka*

- (i) *barisan $X \pm Y = (x_n \pm y_n)$ konvergen ke $x \pm y$*
- (ii) *barisan $XY = (x_n y_n)$ konvergen ke xy*
- (iii) *barisan $cX = (c \cdot x_n)$ konvergen ke cx untuk suatu skalar c*

Bukti.

- (i) $(x_n + y_n) \rightarrow x + y$

Akan dibuktikan $(x_n + y_n)$ konvergen ke $(x + y)$, yaitu $|(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon$.

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Diketahui x_n konvergen ke x , artinya terdapat $k_1 \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku $|x_n - x| < \varepsilon/2$ untuk setiap $n \geq k_1$. Diketahui pula (y_n) konvergen ke y , artinya terdapat $k_2 \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku $|y_n - y| < \varepsilon/2$ untuk setiap $n \geq k_2$. Diambil $k = \max\{k_1, k_2\}$, diperoleh:

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &= |x_n + y_n - x - y| \\ &= |x_n - x + y_n - y| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti $(x_n + y_n)$ konvergen ke $x + y$

- (ii) $(x_n y_n) \rightarrow xy$

Akan dibuktikan $(x_n y_n)$ konvergen ke xy , yaitu $|(x_n y_n) - xy| < \varepsilon$.

Karena (x_n) konvergen, maka x_n terbatas, katakan ke $M_1 > 0$ sehingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$.

Karena $\lim x_n = x$ terdapat $k_1 \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku $|x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{2M}, \forall n \geq k_1$.

Karena $\lim y_n = y$ terdapat $k_2 \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku $|y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{2M}, \forall n \geq k_2$.

Diambil $k = \max\{k_1, k_2\}$, diperoleh

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &\leq |x_n| |y_n - y| + |y| |x_n - x| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Terbukti $(x_n y_n)$ konvergen ke xy .

Barisan konstan adalah barisan konvergen.

Misal $x_n = 1, 1, 1, 1, \dots$

x_n konvergen.

(iii) $cx_n \rightarrow cx$.

Akan dibuktikan cx_n konvergen ke cx , artinya $|cx_n - cx| < \varepsilon$.

- untuk $c = 0$

Barisan x_n menjadi barisan konstan, akibatnya cx_n konvergen.

- untuk $c \neq 0$

Diketahui $\lim x_n = x$, artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k_1 \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{|c|} \text{ untuk setiap } n \geq k_1$$

Selanjutnya didapat

$$\begin{aligned} |cx_n - cx| &< |c||x_n - x| \\ &< |c| \frac{\varepsilon}{|c|} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti cx_n konvergen ke cx

■

Teorema 4.12. *Jika barisan $X = (x_n)$ konvergen ke x dan barisan $Y = (y_n)$ konvergen ke y , dan $y_n \neq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ serta $y \neq 0$, maka barisan*

$$\frac{X}{Y} = \left(\frac{x_n}{y_n} \right) \text{ konvergen ke } \frac{x}{y}$$

Bukti. Karena diasumsikan $y \neq 0$ dan $y_n \neq 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka bentuk $\frac{x_n}{y_n}$ dan $\frac{x}{y}$ terdefinisi dengan baik.

Bentuk nilai mutlak selisih antara barisan dan limitnya, yaitu

$$\begin{aligned}
\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| &= \left| \frac{x_n y - x y_n}{y_n y} \right| \\
&= \left| \frac{x_n y - x y_n + x_n y_n - x_n y_n}{y_n y} \right| \\
&= \left| \frac{x_n y - x_n y_n + x_n y_n - x y_n}{y_n y} \right| \\
&= \left| \frac{x_n(y - y_n) + y_n(x - x_n)}{y_n y} \right| \\
&= \left| \frac{1}{y_n y} \right| |x_n(y - y_n) + y_n(x - x_n)| \\
&\leq \left| \frac{1}{y_n y} \right| |x_n(y - y_n)| + |y_n(x - x_n)| \\
&= \left| \frac{x_n}{y_n y} \right| |y - y_n| + \left| \frac{y_n}{y_n y} \right| |x - x_n| \\
&= \left| \frac{x_n}{y_n y} \right| |y - y_n| + \left| \frac{1}{y} \right| |x - x_n|
\end{aligned}$$

Selanjutnya karena (x_n) konvergen maka (x_n) terbatas. Nyatakan terbatas oleh $M > 0$, maka

$$|x_n| \leq M, \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$

Karena (y_n) konvergen ke y maka diberikan $\varepsilon = \frac{1}{2}|y| > 0$, terdapat $k_1 \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku $|y_n - y| < \varepsilon = \frac{1}{2}|y|$ untuk setiap $n \geq k_1$. Dengan ketaksamaan segitiga, diperoleh $||y_n| - |y|| \leq |y_n - y|$ dan $-y_n - y < \frac{1}{2}|y|$.

Dengan menggunakan sifat nilai mutlak, diperoleh

$$\begin{aligned}
||y_n| - |y|| < \frac{1}{2}|y| &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}|y| < |y_n| - |y| < \frac{1}{2}|y| \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}|y| < |y_n| < \frac{3}{2}|y|, \forall n \geq k_1.
\end{aligned}$$

Diperoleh $|y_n| > \frac{1}{2}|y|$, selanjutnya didapat

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|y|}, \forall n \geq k_1.$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| &\leq \left| \frac{x_n}{y_n y} \right| |y_n - y| + \left| \frac{1}{y} \right| |x_n - x| \\
 &= \left| \frac{x_n}{y} \right| \left| \frac{1}{y_n} \right| |y_n - y| + \left| \frac{1}{y} \right| |x_n - x| \\
 &\leq \frac{M2}{|y||y|} |y_n - y| + \frac{1}{y} |x_n - x| \\
 &= \frac{2M}{|y|^2} |y_n - y| + \frac{1}{y} |x_n - x| \quad \dots\dots (i)
 \end{aligned}$$

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$ karena $(x_n) \rightarrow x$ dan $(y_n) \rightarrow y$ maka dapat ditemukan k_2 dan $k_3 \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku $|x_n - x| < |y| \frac{\varepsilon}{2M}$ setiap $n \geq k_2$ dan $|y_n - y| < |y|^2 \frac{\varepsilon}{4M}$ setiap $n \geq k_3$.

Pilih $k = \max\{k_1, k_2, k_3\}$, berdasarkan (i) diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| &\leq \frac{2M}{|y|^2} |y_n - y| + \left| \frac{1}{y} \right| |x_n - x| \\
 &< \frac{2M}{|y|^2} \frac{|y|^2 \varepsilon}{4M} + \frac{1}{|y|} |y| \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

$\therefore$ Terbukti ■

Contoh. Tunjukkan bahwa $\lim \left(\frac{2n+1}{n+5} \right) = 2$! Ubah ke bentuk barisan konvergen, yaitu

$$\frac{2n+1}{n+5} = \frac{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{5}{n}} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{5}{n}}$$

Misal $x_n = 2 + \frac{1}{n}$, maka $x_n \rightarrow 2$

$y_n = 1 + \frac{5}{n}$, maka $y_n \rightarrow 1$

Jadi berdasarkan Teorema 4.12,

$$\left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \left(\frac{2n+1}{n+5} \right) \rightarrow \frac{2}{1} = 2.$$

Benar. □

Teorema 4.13. Jika (x_n) barisan tak negatif, yaitu $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ maka $\lim(x_n) \geq 0$.

Bukti. Akan dibuktikan secara kontradiktif.

Andaikan $\lim(x_n) < 0$. Ambil $\varepsilon = -x > 0$, maka berdasarkan definisi barisan konvergen, terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku $|x_n - x| < \varepsilon = -x \Rightarrow |x_n - x| < -x$.

Berdasarkan sifat nilai mutlak, diperoleh:

$$\begin{aligned} |x_n - x| < -x &\Leftrightarrow x < x_n - x < -x \\ &\Leftrightarrow 2x < x_n < 0 \end{aligned}$$

Diperoleh $x_n < 0, \forall n \geq k$. Khususnya untuk $n = k$ diperoleh $x_k < 0$.

Terjadi kontradiksi, yaitu $x_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Maka pengandaian salah, haruslah $\lim(x_n) \geq 0$. ■

Teorema 4.14. *Jika barisan (x_n) , (y_n) , dan (z_n) memenuhi*

$$(i) \ x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \ \lim(x_n) = \lim(z_n)$$

maka (y_n) konvergen, dan $\lim(y_n) = \lim(x_n) = \lim(z_n)$.

Bukti. Misal $\lim(x_n) = \lim(z_n) = w$.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat k_1 dan $k_2 \in \mathbb{N}$

sehingga berlaku $|x_n - w| < \varepsilon, \forall n \geq k_1$

$$|z_n - w| < \varepsilon, \forall n \geq k_2$$

Pilih $k = \max\{k_1, k_2\}$ maka $|x_n - w| < \varepsilon$ dan $|z_n - w| < \varepsilon, \forall n \geq k$.

Berdasarkan sifat nilai mutlak, diperoleh:

$$|x_n - w| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - w < \varepsilon \quad \text{dan}$$

$$|z_n - w| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < z_n - w < \varepsilon$$

Diperoleh $-\varepsilon < x_n - w$ dan $z_n - w < \varepsilon, \forall n \geq k$.

Diketahui $x_n \leq y_n \leq z_n$, dengan menambahkan $-w$ diperoleh

$$x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon \leq y_n - w \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |y_n - w| < \varepsilon$$

Terbukti. ■

3. Barisan Monoton

Definisi 4.15. *Suatu barisan (x_n) dikatakan **monoton naik** jika*

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sedangkan dikatakan **monoton turun** jika

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Barisan (x_n) dikatakan monoton, jika ia hanya monoton naik saja atau monoton turun saja.
- Istilah monoton tegas (*strictly monoton*) dimaksudkan untuk kasus tidak termuatnya tanda sama dengan pada ketidaksamaan diatas.

Contoh.

1. $(1, 2, 3, \dots, n, \dots)$ naik tegas
2. $(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, \dots)$ naik
3. $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ turun tegas
4. $(-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots)$ tidak monoton
5. $(4, 4, 4, 4, \dots)$ monoton
6. $(7, 6, 2, 1, 2, 3, 4, \dots)$

□

Jika diberikan sesuatu barisan (a_n) dimana $a \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$, maka jika

- $a \geq 1$ maka (a^n) monoton naik tegas
- $0 < a < 1$ maka (a^n) monoton turun tegas
- $a < 0$ maka (a^n) tidak monoton
- $a = 1$ maka (a^n) monoton

Teorema 4.16. *Jika barisan (x_n) monoton dan terbatas, maka (x_n) konvergen. Selanjutnya:*

(i) *Jika (x_n) monoton naik, maka $\lim(x_n) = \sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$*

(ii) *Jika (x_n) monoton turun, maka $\lim(x_n) = \inf\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$*

Bukti.

(i) (x_n) monoton naik dan terbatas, maka $\lim(x_n) = \sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Diketahui (x_n) naik dan terbatas, berarti terdapat $m > 0$ sehingga $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Jadi himpunan $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ terbatas ke atas. Berdasarkan sifat supremum, maka himpunan tersebut mempunyai supremum.

Misal $\sup\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = x^*$.

Selanjutnya, akan dibuktikan $\lim(x_n) = \sup\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = x^*$.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka $x^* - \varepsilon$ bukan batas atas $\{x_n\}$. Jadi terdapat $x_k \in \{x_n\}$ sehingga $x^* - \varepsilon < x_k$. Mengingat (x_n) naik dan $x_n < x^*$ (karena $x^* = \sup x_n$) maka diperoleh $x^* - \varepsilon < x_k \leq x_n < x^* < x^* + \varepsilon, \forall n \geq k$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x^* - \varepsilon < x_n < x^* + \varepsilon &\Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - x^* < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x_n - x^*| < \varepsilon \end{aligned}$$

Terbukti, $\lim(x_n) = x^* = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) Sebagai latihan.

■

4. Barisan Bagian (*Subsequence*)

Definisi 4.17. Jika $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan real dan misalkan diambil barisan naik tegas, yaitu $r_1 < r_2 < r_3 < \dots, < r_n < \dots$ maka barisan X' diberikan oleh $(Xr_1, Xr_2, Xr_3, \dots, Xr_n, \dots)$ disebut barisan bilangan (sub barisan/subsequence) dari X .

Barisan bagian ditulis $X' = (Xr_n : n \in \mathbb{N})$

Contoh. Diberikan barisan X

- barisan bilangan naik tegas disini, dimaksud bukan nilai dari barisannya, tapi nilai indeksnya.

$$X = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$$

$$1 < 2 < 3 < 4 < \dots \leftarrow \text{indeks}$$

didapat

$$\begin{aligned} - X' &= \left(\frac{1}{2n}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots\right) \\ &2 < 4 < 6 < \dots \quad X' \text{ sub barisan } X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - X'' &= \left(\frac{1}{2n-1}\right) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2n-1}, \dots\right) \\ &1 < 3 < 5 < 7 < \dots \quad X'' \text{ sub barisan } X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - X''' &= \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots\right) \\ &1 < 4 < 7 < \dots \quad X''' \text{ sub barisan } X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - X^{iv} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\right) \\ &4 > 3 \quad X^{iv} \text{ bukan sub barisan } X \end{aligned}$$

$$- X^v = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right)$$

$$2 \leq 2 \quad X^v \text{ bukan sub barisan } X$$

lebih lanjut

$X' = (x_2, x_4, x_6, x_8, \dots)$ adalah barisan bagian dari $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$ dan diperoleh $r_n = n$.

Contoh : $r_{2n} \geq n$

$$r_2 \geq 1$$

□

Teorema 4.18. (*Kekonvergenan Barisan Bagian*)

Jika barisan (X_n) konvergen ke X , maka setiap barisan bagiannya juga konvergen ke X .

Bukti. $(Xr_n \rightarrow x)$

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Diketahui (X_n) konvergen ke X , maka terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku $|X_n - X| < \varepsilon, \forall n \geq k$. Mengingat $r_n \geq n$ maka berlaku juga $|Xr_n - X| < \varepsilon, \forall r_n \geq n \geq k$.

Terbukti $Xr_n \rightarrow X$

$$X' \rightarrow X$$

■

(+) Tidak semua barisan monoton, tapi pada setiap barisan selalu dapat dikonstruksikan barisan bagian yang monoton. Jika barisan induknya terbatas, maka jelas setiap barisan bagiannya juga terbatas.

Teorema 4.19. (*Teorema Bolzano-Weirstrass*)

Setiap barisan terbatas, selalu memuat barisan bagian yang konvergen.

Contoh. Barisan $((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$

→ tidak konvergen

→ tidak monoton

→ terbatas

$X' = (-1, -1, -1, -1, \dots, ((-1)^{2n-1}), \dots)$ konvergen

$X'' = (1, 1, 1, \dots, ((-1)^{2n}), \dots)$ konvergen

□

Selanjutnya akan didefinisikan salah satu barisan yang penting dalam analisis, yaitu Barisan Cauchy. Secara intuitif, suatu barisan (x_n) disebut barisan Cauchy apabila suku-sukunya semakin lama semakin saling berdekatan satu sama lain, meskipun kita belum mengetahui (atau belum pasti) ke bilangan real mana barisan tersebut menuju.

Definisi 4.20. (*Barisan Cauchy*)

Barisan $X = (x_n)$ disebut barisan cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $k \in \mathbb{N}$, sehingga

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \forall m, n \geq k$$

Artinya: mulai dari indeks tertentu k , jarak antara dua suku mana pun x_m dan x_n akan selalu lebih kecil dari ε yang kita pilih sebelumnya. Dengan kata lain, setelah cukup jauh, semua suku barisan “mengelompok rapat” dalam suatu interval kecil.

Contoh.

- **Barisan konvergen (Cauchy):**

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Suku-suku barisan ini semakin lama semakin mendekati 0. Barisan ini merupakan barisan Cauchy, karena setelah suatu indeks tertentu, selisih antara dua suku x_m dan x_n dapat dibuat sekecil mungkin.

- **Barisan tak Cauchy (divergen):**

$$x_n = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Barisan ini divergen menuju tak hingga. Selisih antar suku justru semakin besar seiring pertambahan indeks, sehingga tidak memenuhi syarat sebagai barisan Cauchy.

□

Perhatikan ilustrasi berikut.



Gambar 4.4: Ilustrasi barisan $x_n = \frac{1}{n}$ yang mendekati 0 dengan interval ε di sekitar titik limit.

Gambar 4.4 menunjukkan barisan $x_n = \frac{1}{n}$ yang bergerak semakin dekat ke titik 0 pada garis bilangan real. Interval ε digambarkan dengan garis merah putus-putus di sekitar 0. Hal ini mengilustrasikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat N sehingga untuk semua $n > N$, nilai x_n akan berada di dalam interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Dengan demikian, barisan tersebut konvergen ke 0.

Teorema 4.21. *Jika (x_n) barisan cauchy, maka x_n terbatas.*

Bukti. Karena (x_n) cauchy, maka dapat diambil $\varepsilon = 1$, maka terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku

$$|x_m - x_n| < 1, \forall m, n \geq k$$

Khususnya untuk $m = k$, maka berlaku

$$|x_k - x_n| = |x_n - x_k| < 1, \forall n \geq k$$

Akibatnya diperoleh

$$|x_n| < 1 + |x_k|, \forall n \geq k$$

Diambil $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{k-1}|, |x_k| + 1\}$ maka diperoleh $|x_n| \leq M, \forall n \leq \mathbb{N}$.

Terbukti (x_n) terbatas. ■

Teorema 4.22. *Suatu barisan bilangan real adalah konvergen jika dan hanya jika barisan tersebut cauchy.*

$$\text{konvergen} \Leftrightarrow \text{cauchy} \Leftrightarrow \text{terbatas}.$$

Contoh:

Barisan $(\frac{1}{n})$ adalah barisan cauchy.

Bukti. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$.

Berdasarkan sifat Archimedes, terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga $k > \frac{2}{\varepsilon} \rightarrow k\varepsilon > 2 \rightarrow \frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{k} \rightarrow \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Jadi, $\forall m, n \geq M$ berlaku $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Diperoleh

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{Terbukti} \end{aligned}$$

■

$((-1)^n)$ tidak cauchy karena tidak konvergen.

Definisi 4.23. (Barisan Kontraksi)

Barisan bilangan real $X = (x_n)$ dikatakan kontraksi jika terdapat bilangan real c dengan $0 < c < 1$ sehingga berlaku $|x_{n+2} - x_{n+1}| < c|x_{n+1} - x_n|, \forall n \in \mathbb{N}$.

Bilangan c dinamakan konstanta kontraksi.

$$|x_3 - x_2| < c|x_2 - x_1|$$

$$|x_4 - x_3| < c|x_3 - x_2|$$

Teorema 4.24. *Jika (x_n) barisan kontraksi, maka (x_n) konvergen.*

Bukti. Akan dibuktikan (x_n) konvergen dengan membuktikan (x_n) cauchy. Perhatikan bahwa pola nilai selisih mutlak dua suku yang berdekatan dibatasi oleh batas atas suku $|x_2 - x_1|$.

Selanjutnya, didapat

$$\begin{aligned}
 |x_{n+2} - x_{n+1}| &< c|x_{n+1} - x_n| \\
 &< c(c|x_n - x_{n-1}|) \\
 &= c^2|x_n - x_{n-1}| \\
 &< c^2(c|x_{n-1} - x_{n-2}|) \\
 &= c^3|x_{n-1} - x_{n-2}| \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Estimasi nilai selisih $\leq c^m|x_2 - x_1|$

dengan mengansumsikan $m > 2$, diperoleh

$$\begin{aligned}
 |x_n - x_m| &= |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x_{n+2} + x_{n+2} - \cdots + \cdots - x_{m-1} + x_{m-1} - x_m| \\
 &= |(x_n - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_{n+2}) + (x_{n+2} - x_{n+3}) + \cdots + (x_{m-1} - x_m)| \\
 &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + |x_{n+2} - x_{n+3}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| \\
 &= |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \cdots + |x_m - x_{m-1}| \\
 &< \underbrace{c^{m-1} + c^m + c^{m+1} + \cdots + c^{m-2}}_{\text{deret geometri}(m-n)\text{suku}} |x_2 - x_1| \\
 &= c^{m-1} \left(\frac{1 - c^{m-n}}{1 - c} \right) |x_2 - x_1| \\
 &\leq c^{m-1} \left(\frac{1}{1 - c} \right) |x_2 - x_1|
 \end{aligned}$$

Karena $0 < c < 1$, jadi (x_n) Cauchy. Berdasarkan Teorema 4.22, maka (x_n) konvergen. ■

Latihan

1. Tentukan nilai dan bentuk dari barisan $(x_n)(y_n)$.
2. Tentukan nilai dan bentuk dari barisan $\frac{(x_n)}{(y_n)}$.
3. Tunjukkan bahwa $\lim \left(\frac{3n+2}{n+1} \right) = 3$.
4. Buktikan Teorema 4.16 poin (ii).

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Abbott, S. (2001). *Understanding Analysis*. Springer.
- [2] Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to Real Analysis* (3rd ed.). John Wiley & Sons.
- [3] DePree, J., & Swartz, C. (1998). *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons.
- [4] Goldberg, R. R. (1980). *Methods of Real Analysis* (2nd ed.). John Wiley & Sons.

Buku ajar Pengantar Analisis Real ini disusun untuk memberikan pemahaman mendasar dan menyeluruh mengenai bilangan real beserta sifat-sifatnya. Materi diawali dengan pendahuluan yang membahas himpunan, fungsi, konstruksi bilangan real, serta prinsip induksi matematika sebagai landasan berpikir logis dan formal.

Pembahasan dilanjutkan pada sifat aljabar bilangan real, termasuk bilangan irasional, sebelum beranjak ke sifat urutan bilangan real yang mencakup ketaksamaan penting, nilai mutlak, jarak, serta representasi garis bilangan. Pada bagian berikutnya, buku ini menguraikan sifat kelengkapan bilangan real melalui konsep supremum, infimum, dan interval, yang menjadi dasar penting bagi analisis matematika.

Bab terakhir menyajikan pembahasan mendalam tentang barisan bilangan real, limit barisan, barisan monoton, serta barisan bagian (subsequence), yang menjadi fondasi untuk memahami konsep limit fungsi, kontinuitas, dan topik lanjutan dalam analisis.

Setiap bab dilengkapi dengan latihan soal untuk mengasah kemampuan berpikir kritis, logis, serta keterampilan pembuktian matematis mahasiswa. Buku ini sangat sesuai digunakan oleh mahasiswa program studi Matematika maupun Pendidikan Matematika, serta dapat menjadi referensi bagi siapa saja yang ingin memahami dasar analisis real secara sistematis.